

Indice

1	Introduzione	3
2	Quantità fisiche in approssimazione di campo medio	11
2.1	Rappresentazione della funzione di partizione di un sistema di fermioni tramite un integrale funzionale	12
2.2	Espansione in “loop”	19
2.3	Risultati analitici per le grandezze fisiche in campo medio . . .	21
3	Spettro delle eccitazioni collettive	37
3.1	Studio dei poli della funzione di vertice per “piccoli” q e ω : evoluzione della velocità del suono dal limite BCS al limite BE	38
3.1.1	Caso bidimensionale	41
3.1.2	Caso tridimensionale	47
3.2	Decadimento di un’eccitazione collettiva in due quasiparticelle	54
3.3	Relazione di dispersione per “grandi” q	55
3.4	Analisi numerica dello spettro delle eccitazioni collettive . . .	56
4	Studio della dipendenza da ω della funzione di vertice per momento del centro di massa nullo	60
4.1	Metodo di calcolo per la ricerca delle quasirisonanze	62
4.2	Caso bidimensionale	64
4.3	Caso tridimensionale	69
5	Studio di alcune grandezze fisiche con l’inclusione delle fluttuazioni oltre l’approssimazione di campo medio	76
5.1	Rappresentazione spettrale della funzione di vertice	78

5.2	Self-energia	81
5.3	Spostamento del potenziale chimico	82
5.4	Calcolo di h e $n_f^{(1)}$	86
5.4.1	Somma sulle frequenze di Matsubara	86
5.4.2	Contributo dello stato legato e del continuo	89
5.5	Calcolo dei residui	90
5.6	Funzione di vertice nel limite BE	91
5.7	Calcolo di Δ_1 e μ_1 nel limite BE	92
5.8	Densità degli stati di particella singola	94
6	Conclusioni	100
A	Integrali ellittici	102
B	Risultati analitici per la lunghezza di coerenza di fase a temperatura zero	106

Capitolo 1

Introduzione

Nel 1911 il fisico olandese Kamerlingh Onnes riuscì a liquefare l'elio, ultimo fra i gas inerti a essere condensato. L'elio liquido permise a Onnes di raffreddare materiali a temperature di poco superiore al grado Kelvin e quindi di studiare il comportamento della materia a basse temperature. In seguito a misure di resistenza elettrica del mercurio egli si accorse che, quando la temperatura del campione scendeva a 4.2 Kelvin, la resistenza scompariva: fu la scoperta della superconduttività. La resistenza nulla al flusso di corrente elettrica non era il solo motivo di meraviglia: il comportamento dei superconduttori in campo magnetico si rivelò altrettanto sorprendente. Nel 1933 due fisici tedeschi, Meissner e Ochsenfeld, scoprirono che un superconduttore può espellere il flusso magnetico quando viene raffreddato al di sotto della sua temperatura di transizione. La completa espulsione del flusso (diamagnetismo perfetto) è nota oggi sotto il nome di effetto Meissner.

Nonostante i progressi nelle osservazioni sperimentali, il problema di fornire una spiegazione teorica per lo stato di superconduzione si rivelò particolarmente difficile. Solo negli anni cinquanta Ginzburg e Landau svilupparono una teoria fenomenologica, postulando due equazioni che descrivevano la transizione dallo stato normale a quello di superconduzione. Non si riusciva però ancora a spiegare perché questo fenomeno si verificasse dal punto di vista microscopico.

Nel 1957 Bardeen, Cooper e Schrieffer misero a punto una teoria che fornì una spiegazione microscopica della superconduttività. Secondo la co-

siddetta teoria BCS, gli elettroni di conduzione si propagano senza incontrare resistenza perché si muovono in coppie, le cosiddette coppie di Cooper. Gli elettroni formano coppie di Cooper in quanto interagiscono con i fononi, vibrazioni meccaniche del reticolo cristallino del metallo. Le vibrazioni degli atomi del reticolo tendono a neutralizzare la repulsione che normalmente si esercita tra gli elettroni, anzi producono una debole forza attrattiva. L'intensità di questa interazione dipende dalla temperatura. Il punto, su una scala delle temperature, al quale si manifesta la superconduttività viene definito temperatura critica o temperatura di transizione di fase. A temperature al di sopra di questo punto critico, le fluttuazioni termiche distruggono le coppie di Cooper e di conseguenza lo stato di superconduzione del metallo. Un'importante scala microscopica di distanza in un superconduttore è la separazione spaziale degli elettroni di una coppia di Cooper: questa distanza è chiamata lunghezza di coerenza, e, in superconduttori tipici, può variare da alcune decine ad alcune centinaia di nanometri. La teoria BCS ha fornito una descrizione soddisfacente dei superconduttori tradizionali le cui temperature critiche non superavano i 20-25 Kelvin.

Nel 1986 però Bednorz e Müller, ricercatori del laboratorio Ibm di Zurigo, riuscirono a strutturare un materiale a base di ossido di rame in grado di entrare in fase di superconduttività ad una temperatura di circa 30 K. Questa scoperta, che valse il premio Nobel per la Fisica ai due ricercatori, rappresentò una svolta decisiva per lo studio sperimentale e teorico della superconduttività. Infatti dal 1986 in poi, molti ricercatori hanno dedicato la loro attività alla preparazione di materiali con temperature critiche sempre più alte fino a raggiungere i 133 K in un materiale a base di ossido di rame contenente mercurio ($HgBa_2Ca_2Cu_3O_{8+\delta}$). La prospettiva di strutturare materiali *superconduttori a temperatura ambiente* potrebbe infatti innescare una vera e propria rivoluzione tecnologica.

Riportiamo ora una breve panoramica della struttura reticolare e dei diagrammi di fase di alcuni noti superconduttori ad alta temperatura critica. In generale essi hanno uno o più piani reticolari con base CuO_2 nella loro struttura. Questi piani sono separati da altri atomi come il bario, l'ossigeno, il lantanio, etc. Molti ricercatori ritengono che la superconduttività sia

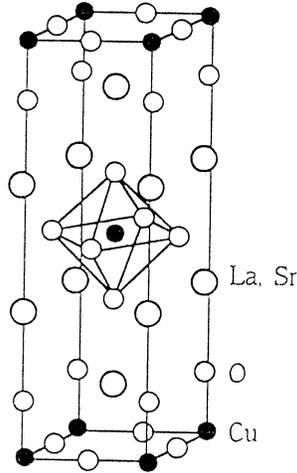


Figura 1.1: Struttura cristallina del $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ (da Almasan e Maple, 1991)

connessa a processi che avvengono nei piani CuO_2 , considerando quindi il sistema come quasi bidimensionale.

Uno dei primi superconduttori ad alta temperatura critica scoperti è il $La_{2-x}Sr_xCuO_4$, la cui struttura cristallina è tetragonale a corpo centrato (bct) ed è mostrata in Figura 1.1. Nei piani CuO_2 , ogni ione di rame Cu^{2+} è fortemente legato a quattro ioni di ossigeno O^{2-} con una distanza di circa 1.9 \AA . I piani CuO_2 sono distanti circa 6.6 \AA , separati da piani di LaO . Gli atomi di rame hanno anche un atomo di ossigeno sopra e sotto nella direzione cristallografica c ad una distanza di circa 2.4 \AA . Drogando il materiale con lo stronzio, alcuni ioni La^{3+} sono rimpiazzati da ioni Sr^{2+} : questo comporta un minor numero di elettroni donati ai piani CuO_2 . Si è riscontrato che il drogaggio ottimale per ottenere il massimo valore di T_c è $x \approx 0.15$ come si può osservare in Figura 1.2. Questo materiale presenta anche una transizione di fase strutturale passando da una struttura tetragonale ad alta temperatura ad una struttura ortorombica a basse temperature.

Un altro composto noto ad alta temperatura critica è il $YBa_2Cu_3O_{6+x}$, la cui complessa struttura cristallina è mostrata in Figura 1.3 In questo com-

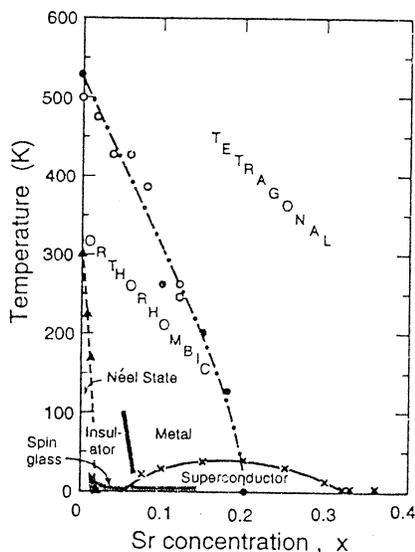


Figura 1.2: Diagramma di fase del $La_{2-x}Sr_xCuO_4$ (da Keimer et al., 1992)

posto sono presenti due piani reticolari CuO_2 per cella unitaria distanti circa 3.2 \AA e separati da ioni Y^{3+} . Queste coppie di piani CuO_2 sono a loro volta separati da piani contenenti atomi di bario, ossigeno e rame. La distanza fra le coppie di piani conduttori è di circa 8.2 \AA . Il diagramma di fase di questo materiale, mostrato in Figura 1.4, indica che l'inizio della fase di superconduzione è a $x_c \approx 0.3$ e che la massima temperatura critica è ottenuta a $x \approx 1$. Anche in questo materiale avviene una transizione di fase strutturale (da tetragonale a ortorombica) vicino a $x_c \approx 0.3$. Per approfondimenti si veda, per esempio, l'articolo di rassegna di E. Dagotto [16]. Questi esempi sono stati qui riportati per mostrare la grande complessità strutturale di questi materiali e la conseguente difficoltà di trovare un modello fisico che descriva questi composti in modo soddisfacente.

Dal punto di vista teorico una delle caratteristiche più importanti è che, nella nuova generazione di superconduttori, il legame che unisce le coppie di elettroni è *sorprendentemente* forte. Il motivo di questo comportamento è attualmente non compreso. È quindi necessario affrontare il problema di trovare l'hamiltoniana microscopica appropriata che descriva la nuova classe

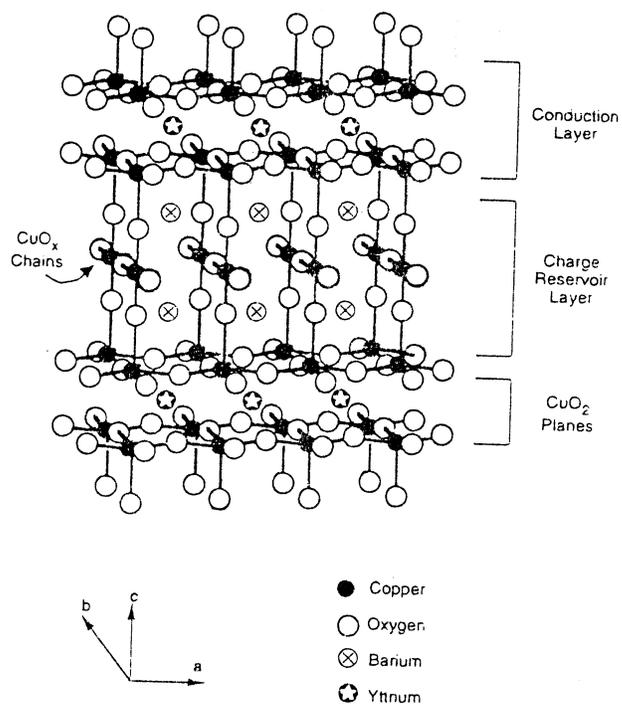


Figura 1.3: Struttura cristallina del $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ (da Jorgensen, 1991)

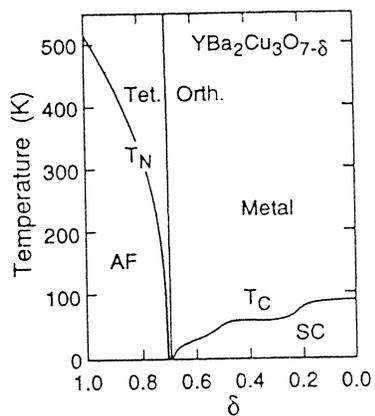


Figura 1.4: Diagramma di fase del $YBa_2Cu_3O_{6+x}$ (da Burns, 1992; Koike et al., 1989)

di superconduttori. Occorre, tuttavia, puntualizzare che la soluzione di un tale problema, seppure importantissimo, non rappresenta un punto d'arrivo: sarà comunque necessario trovare le *soluzioni* di una tale hamiltoniana.

Il fatto che nei nuovi materiali superconduttori gli elettroni siano fortemente correlati, ha posto, come problema di importanza capitale, lo studio dell'evoluzione di un sistema di fermioni all'aumentare dell'intensità di un potenziale attrattivo efficace tra gli stessi. Uno dei primi articoli apparso su tale argomento è stato quello di Nozières e Schmitt-Rink [9], i quali hanno seguito l'evoluzione da accoppiamento debole a forte. Essi hanno mostrato che, per un'interazione debolmente attrattiva, un tale sistema subisce una transizione alla fase di superconduzione a basse temperature con la formazione di coppie di Cooper largamente sovrapposte in uno stato di singoletto di spin proprio come nella teoria BCS. Al contrario, per un'interazione fortemente attrattiva, si formano bosoni composti, formati da coppie di elettroni fortemente legati, e la transizione alla fase di superconduzione è interpretata tramite il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein. Nonostante il fatto che i due limiti di accoppiamento debole e forte siano fisicamente differenti, Nozières e Schmitt-Rink hanno mostrato che l'evoluzione da un tipo di superconduttività all'altro è continua. Non essendo l'interazione attrattiva tra fermioni una quantità deducibile dagli esperimenti, Pistoiesi e Strinati [12] hanno proposto di utilizzare la variabile adimensionale $k_f \xi_{pair}$ (k_f essendo il modulo del vettore d'onda di Fermi e ξ_{pair} la lunghezza di coerenza) per seguire l'evoluzione dalla superconduttività BCS alla condensazione di Bose-Einstein, sia perché indipendente dai dettagli del potenziale di interazione, sia perché accessibile sperimentalmente. Essi hanno mostrato che, in questa variabile, il passaggio da un tipo di superconduttività all'altro è invece piuttosto brusco e che i nuovi superconduttori ad alta temperatura critica sono caratterizzati da un valore di $k_f \xi_{pair}$ di poco maggiore di 2π . Così ci sono forti indizi per ritenere che i nuovi materiali ceramici a base di ossido di rame appartengano a un regime intermedio tra quello BCS di accoppiamento debole e quello Bose-Einstein di accoppiamento forte. È allora importante studiare attentamente le proprietà del sistema di fermioni soprattutto nel regime intermedio ed evidenziare, se possibile, le caratteristiche *peculiari* di

un tale regime.

Esperimenti recenti di spettroscopia su campioni ceramici hanno infatti fornito interessanti e sorprendenti risultati per la densità degli stati di particella singola. Al contrario di quanto avviene nei superconduttori tradizionali, si è riscontrato l'esistenza di *nuovi* stati dentro il gap di energia di particella singola e la presenza di una *struttura* (picchi piuttosto evidenti) sopra il gap. Questi risultati non hanno ancora ricevuto una spiegazione teorica soddisfacente. La ragione di tale situazione è dovuta al fatto che la fisica del problema risulta particolarmente complessa e non ancora sufficientemente compresa. Vedremo infatti che, anche nell'ambito di un modello particolarmente semplificato come quello da noi utilizzato (si trascureranno, infatti, la carica degli elettroni e la struttura del reticolo cristallino, oltre a considerare un potenziale di interazione attrattivo tra fermioni particolarmente semplificato), l'inclusione delle fluttuazioni oltre l'approssimazione di campo medio, indispensabile per ottenere risultati fisicamente significativi nel regime di accoppiamento intermedio, comporta notevoli complicazioni matematiche e, di conseguenza, una difficile interpretazione fisica dei risultati.

Lo scopo del presente lavoro è quello di approfondire alcuni aspetti del vasto e complesso problema dell'evoluzione dalla superconduttività BCS alla condensazione di Bose-Einstein.

Nel Capitolo 2, dopo una breve introduzione del modello utilizzato e una concisa esposizione dei metodi dell'integrazione funzionale, già utilizzati in letteratura (si veda, per esempio, i riferimenti [8], [11] e, in particolare, [13]) per ottenere le funzioni di Green associate al problema, si mostrerà come sia possibile ottenere risultati analitici (per *tutti* i valori della variabile adimensionale $k_f \xi_{pair}$) per le grandezze fisiche e, in particolare, per la densità degli stati di particella singola in approssimazione di campo medio.

Nel Capitolo 3 si affronterà il problema interessante dell'evoluzione dello spettro delle eccitazioni collettive dal limite BCS (modo di Anderson) al limite BE (modo di Bogoliubov) nello stato fondamentale ($T = 0$) del sistema. Si mostrerà come sia possibile anche in questo caso calcolare *analiticamente* lo spettro delle eccitazioni collettive per valori arbitrari del parametro di accoppiamento nel limite di “piccoli” valori di q e ω . Con l'ausilio del calco-

lo numerico si analizzerà poi il differente comportamento dello spettro delle eccitazioni collettive nei due regimi opposti di accoppiamento, evidenziando come anche in questo caso tale cambiamento avvenga in una ristretta regione di valori intorno a $k_f \xi_{pair} = 1$.

Nel Capitolo 4 ci occuperemo dello studio della funzione di vertice per un particolare valore del momento del centro di massa di una coppia (momento nullo) per indagare sulla possibile esistenza di quasi-risonanze, le quali fornirebbero un'interpretazione riguardo l'esistenza di una struttura nella densità degli stati.

Nel Capitolo 5, utilizzando i risultati ottenuti nei capitoli precedenti, rivolgeremo la nostra attenzione allo studio di alcune grandezze fisiche e in particolare della densità degli stati di particella singola includendo le fluttuazioni oltre l'approssimazione di campo medio, le quali risultano, come già evidenziato, particolarmente importanti nel regime di accoppiamento intermedio. Mostriamo risultati espliciti nel limite BE, dove le equazioni possono essere considerevolmente semplificate.

Infine, nel Capitolo 6, trarremo le nostre Conclusioni elencando i problemi lasciati aperti e indicando i possibili sviluppi.

Una breve esposizione delle funzioni speciali della fisica-matematica, qui utilizzate per esprimere le grandezze fisiche di interesse, è data nell'Appendice A allo scopo di una consultazione rapida.

L'Appendice B mostra invece come sia possibile calcolare analiticamente, per ogni valore del parametro d'accoppiamento, la lunghezza di coerenza di fase a temperatura zero, la quale è associata alle variazioni spaziali del parametro d'ordine.

Capitolo 2

Quantità fisiche in approssimazione di campo medio

Lo scopo di questo capitolo è di descrivere l'evoluzione delle grandezze fisiche in approssimazione di campo medio nel limite di temperatura zero al variare della variabile adimensionale $k_f \xi_{pair}$. Si mostrerà come sia possibile ottenere espressioni analitiche *anche* nella regione di passaggio da accoppiamento debole ad accoppiamento forte, purché il potenziale attrattivo tra fermioni abbia una forma “di contatto” particolarmente semplice.

La prima parte del capitolo è dedicata ad una concisa esposizione dei metodi dell'integrazione funzionale e all'espansione a “loop” associata. In questa parte introduttiva si segue strettamente l'esposizione elaborata da Pistolesi e Strinati [13].

2.1 Rappresentazione della funzione di partizione di un sistema di fermioni tramite un integrale funzionale

I metodi dell'integrazione funzionale fecero la loro prima comparsa nella fisica teorica nel 1948, quando R.P. Feynman propose una formulazione alternativa della meccanica quantistica.

Mentre in meccanica classica, assegnata una Lagrangiana e specificati i punti iniziale e finale dello spazio-tempo, esiste un unico cammino corrispondente al moto reale della particella (il cammino che minimizza l'azione, secondo il principio di Hamilton), in meccanica quantistica tutti i possibili cammini giocano un ruolo. Feynman riuscì a tradurre questo concetto in una rigorosa formulazione matematica (gli integrali di cammino). Il suo approccio si rivelò col tempo molto fecondo e condusse allo sviluppo dell'elettrodinamica quantistica. L'integrazione funzionale (si veda, per esempio, [1], [2] e [3]) rappresenta oggi uno dei metodi più potenti e flessibili della fisica teorica. In fisica statistica l'applicazione degli integrali funzionali è particolarmente utile nello studio dei modi collettivi. L'idea principale è di sostituire le variabili iniziali con nuove variabili che descrivano i gradi di libertà "collettivi" del sistema. Inoltre, l'integrazione funzionale permette di riottenere le usuali tecniche diagrammatiche.

Gli stessi risultati possono essere ottenuti ovviamente anche con i più tradizionali metodi diagrammatici. Per lo studio dell'evoluzione dalla superconduttività BCS alla condensazione di Bose-Einstein recentemente Haussmann [10] ha proposto un insieme di equazioni autoconsistenti utilizzando uno schema di approssimazione noto come metodo di Brueckner-Hartree-Fock in fisica nucleare.

Le equazioni qui riportate, derivate attraverso i metodi dell'integrazione funzionale, non sono autoconsistenti. Haussmann ha comunque dimostrato che l'autoconsistenza delle equazioni è essenziale soltanto nella regione intermedia fra accoppiamento debole e forte, a causa di complicati processi fisici (come il decadimento di una coppia in due fermioni liberi e la ricombinazione di fermioni liberi in coppie).

Consideriamo un sistema di fermioni interagenti (di spin 1/2) alla temperatura assoluta T contenuti in una scatola cubica di volume Ω . Utilizzando un sistema di unità di misura in cui $\hbar = 1$ (\hbar costante di Planck razionalizzata), $k_B = 1$ (k_B costante di Boltzmann) il funzionale azione si scrive:

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} \left(\sum_\sigma \bar{\psi}_\sigma(x) \partial_\tau \psi_\sigma(x) + H(x) \right) \quad (2.1)$$

in cui la densità di hamiltoniana è

$$H(x) = - \sum_\sigma \bar{\psi}_\sigma(x) \left(\frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) \psi_\sigma(x) + \frac{1}{2} \int dy u(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{\psi}_\sigma(x) \bar{\psi}_{\sigma'}(y) \psi_{\sigma'}(y) \psi_\sigma(x) \quad . \quad (2.2)$$

Le funzioni $\psi(x)$ [$x \equiv (\mathbf{x}, \tau)$] sono elementi di un'algebra di Grassmann infinito-dimensionale, τ è il tempo immaginario ($\tau \in [0, \beta], \beta = T^{-1}$), $\mathbf{x} \in \Omega$, σ è l'indice di spin, m è la massa dei fermioni, μ è il potenziale chimico e $u(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ è un potenziale di interazione a due corpi indipendente da τ (si trascurano in questo modo effetti di ritardo).

Utilizzando le rappresentazioni di Fourier spaziali per le $\psi_\sigma(x)$, $\bar{\psi}_\sigma(x)$ e per il potenziale $u(\mathbf{x})$

$$\psi_\sigma(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} c_\sigma(\mathbf{k}, \tau) \quad (2.3)$$

$$\bar{\psi}_\sigma(\mathbf{x}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \bar{c}_\sigma(\mathbf{k}, \tau) \quad (2.4)$$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} v(\mathbf{k}) \quad , \quad (2.5)$$

il funzionale azione diventa:

$$S = \int_0^\beta d\tau \left(\sum_{\mathbf{k}, \sigma} \bar{c}_\sigma(\mathbf{k}, \tau) \partial_\tau c_\sigma(\mathbf{k}, \tau) + H(\tau) \right) \quad (2.6)$$

in cui

$$\begin{aligned}
H(\tau) = & \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \xi_{\mathbf{k}} \bar{c}_{\sigma}(\mathbf{k}, \tau) c_{\sigma}(\mathbf{k}, \tau) + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}, \mathbf{k}'} v(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\
& \times \bar{c}_{\uparrow}(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) \bar{c}_{\downarrow}(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) c_{\downarrow}(-\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) c_{\uparrow}(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) \quad , \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}^2}{2m} - \mu \quad . \quad (2.8)$$

Nell'hamiltoniana (2.7) si è trascurato il termine di interazione tra particelle con spin uguale (ciò corrisponde a considerare uno stato di singoletto di spin come nella teoria BCS). Inoltre, per i calcoli successivi, verrà utilizzato un potenziale “di contatto” che renderà possibile effettuare *analiticamente* i calcoli nell'approssimazione di campo medio:

$$u(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = V\Omega\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad ,$$

$$v(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = V\Omega \quad (V < 0) \quad . \quad (2.9)$$

A questo punto si possono introdurre variabili “collettive” attraverso la seguente trasformazione di Hubbard-Stratonovich [13]:

$$\begin{aligned}
& \exp \left\{ -V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \bar{c}_{\uparrow}(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) \bar{c}_{\downarrow}(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) \right. \\
& \quad \left. \times c_{\downarrow}(-\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) c_{\uparrow}(\mathbf{k}' + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) \right\} = \\
& = -\frac{1}{\pi V} \int db^*(\mathbf{q}, \tau) db(\mathbf{q}, \tau) \exp \left\{ \frac{1}{V} b^*(\mathbf{q}, \tau) b(\mathbf{q}, \tau) \right. \\
& \quad + b(\mathbf{q}, \tau) \sum_{\mathbf{k}} \bar{c}_{\uparrow}(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) \bar{c}_{\downarrow}(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) \\
& \quad \left. + b(\mathbf{q}, \tau) \sum_{\mathbf{k}} c_{\downarrow}(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) c_{\uparrow}(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \tau) \right\} \quad . \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Per ottenere risultati fisicamente corretti è necessario imporre alle variabili di Grassmann $c(\mathbf{k}, \tau)$, $\bar{c}(\mathbf{k}, \tau)$ le condizioni di antiperiodicità nella variabile τ

$$c(\mathbf{k}, \beta) = -c(\mathbf{k}, 0), \quad (2.11)$$

$$\bar{c}(\mathbf{k}, \beta) = -\bar{c}(\mathbf{k}, 0), \quad (2.12)$$

mentre per il campo di Hubbard-Stratonovich $b(\mathbf{q}, \tau)$ si deve avere

$$b(\mathbf{q}, \beta) = b(\mathbf{q}, 0). \quad (2.13)$$

Le rappresentazioni di Fourier temporali per c , \bar{c} e b sono allora date da

$$c_\sigma(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{\omega_s} e^{-i\omega_s \tau} c_\sigma(\mathbf{k}, \omega_s) \quad (2.14)$$

$$\bar{c}_\sigma(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sum_{\omega_s} e^{i\omega_s \tau} c_\sigma(\mathbf{k}, \omega_s) \quad (2.15)$$

$$b(\mathbf{q}, \tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_\nu} e^{-i\omega_\nu \tau} b(\mathbf{q}, \omega_\nu) \quad (2.16)$$

in cui

$$\omega_s = \frac{\pi}{\beta}(2s + 1) \quad (s \text{ intero}) \quad (2.17)$$

sono le frequenze di Matsubara fermioniche e

$$\omega_\nu = \frac{2\pi\nu}{\beta} \quad (\nu \text{ intero}) \quad (2.18)$$

sono le frequenze di Matsubara bosoniche.

Utilizzando le rappresentazioni di Fourier sopra scritte l'azione diventa

$$\begin{aligned} S = & \sum_{\mathbf{k}, \omega_s, \sigma} (-i\omega_s + \xi_{\mathbf{k}}) \bar{c}_\sigma(\mathbf{k}, \omega_s) c_\sigma(\mathbf{k}, \omega_s) - \frac{1}{\beta V} \sum_{\mathbf{q}, \omega_\nu} |b(\mathbf{q}, \omega_\nu)|^2 \\ & - \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \sum_{\omega_s, \omega_{s'}} b(\mathbf{q}, \omega_s + \omega_{s'}) \bar{c}_\uparrow(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_s) \bar{c}_\downarrow(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_{s'}) \\ & - \frac{1}{\beta} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}} \sum_{\omega_s, \omega_{s'}} b^*(\mathbf{q}, \omega_s + \omega_{s'}) c_\downarrow(-\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_s) c_\uparrow(\mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}, \omega_{s'}) \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Se si esegue a questo punto il cambiamento di variabili

$$\chi_1(k) = \bar{c}_\uparrow(k) \quad , \quad \chi_2(k) = c_\downarrow(-k) \quad (2.20)$$

con $k = (\mathbf{k}, \omega_s)$, il funzionale azione può essere riscritto nella seguente forma matriciale:

$$S' = -\frac{1}{\beta V} \sum_q b^*(q)b(q) + \sum_{k,k'} (\bar{\chi}_1(k), \bar{\chi}_2(k)) \mathbf{M}(k, k') \begin{pmatrix} \chi_1(k') \\ \chi_2(k') \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

in cui $q = (\mathbf{q}, \omega_\nu)$ e

$$\mathbf{M}(k, k') = \begin{pmatrix} \epsilon(k)\delta_{k,k'} & \frac{1}{\beta}b^*(k-k') \\ \frac{1}{\beta}b(k'-k) & -\epsilon(-k)\delta_{k,k'} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

con

$$\epsilon(k) = i\omega_s - \xi_{\mathbf{k}} \quad . \quad (2.23)$$

La funzione di partizione è data quindi dall'integrale funzionale

$$Z = \int \mathcal{D}\bar{\chi}\mathcal{D}\chi\mathcal{D}b^*\mathcal{D}b \exp(-S'). \quad (2.24)$$

A questo punto si possono integrare le variabili fermioniche, ottenendo

$$Z = \int \mathcal{D}b^*\mathcal{D}b \exp(-S_{eff}) \quad (2.25)$$

in cui l'azione efficace, punto di partenza per lo studio delle eccitazioni elementari del sistema, è data da

$$S_{eff} = -\frac{1}{\beta V} \sum_q b^*(q)b(q) - \text{tr} \log \mathbf{M}. \quad (2.26)$$

Poiché l'azione efficace S_{eff} dipende da un insieme infinito di termini di interazione (b^{2n} , n pari, $n \geq 2$), è necessario operare qualche tipo di approssimazione. Un modo sistematico di approssimare l'azione efficace è quello di utilizzare l'espansione a “loop” (in cui “loop” è sinonimo di integrazione sui momenti interni dei diagrammi di Feynman associati alla teoria). In

pratica nel presente contesto si divide la S_{eff} per un parametro formale λ ($0 < \lambda \leq 1$), si sviluppa in serie di potenze di λ fino all'ordine desiderato, e alla fine dei calcoli si pone $\lambda = 1$.

Al di sotto di una certa temperatura critica T_c il sistema condensa e l'azione efficace può essere espansa in termini delle fluttuazioni $\tilde{b}(q)$ attorno al valore condensato Δ_0 , ponendo

$$b(q) = \beta \left(\Delta_0 \delta_{q,0} + \sqrt{\lambda} \tilde{b}(q) \right) \quad . \quad (2.27)$$

Sostituendo la (2.27) nella (2.22) si ottiene

$$\mathbf{M}_\lambda(k, k') = \mathbf{M}_0(k, k') + \sqrt{\lambda} \mathbf{M}_1(k, k') \quad (2.28)$$

in cui

$$\mathbf{M}_0(k, k') = \begin{pmatrix} \epsilon(k) & \Delta_0 \\ \Delta_0 & -\epsilon(-k) \end{pmatrix} \quad , \quad (2.29)$$

$$\mathbf{M}_1(k, k') = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{b}^*(k - k') \\ \tilde{b}(k' - k) & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.30)$$

Utilizzando la (2.28), la (2.26) si scrive quindi nella forma

$$\frac{S_{eff}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} S_{eff}^{(0)} + S_{eff}^{(2)} + \sqrt{\lambda} S_{eff}^{(3)} + \dots \quad (2.31)$$

dove:

$$S_{eff}^{(0)} = \beta \left[-\frac{\Delta_0^2}{V} - \frac{2}{\beta} \sum_{\mathbf{k}} \log(1 + e^{-\beta E_{\mathbf{k}}}) + \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}) \right] \quad (2.32)$$

con

$$E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2} \quad ; \quad (2.33)$$

$$S_{eff}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_q \left(\tilde{b}^*(q), \tilde{b}(-q) \right) \Gamma^{-1}(q) \begin{pmatrix} \tilde{b}(q) \\ \tilde{b}^*(-q) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

con

$$\Gamma^{-1}(q) = \begin{pmatrix} A(q) & B(q) \\ B(q) & A(-q) \end{pmatrix} , \quad (2.35)$$

$$A(q) = -\frac{\beta}{V} - \sum_k \mathcal{G}_0(k) \mathcal{G}_0(q-k) , \quad (2.36)$$

$$B(q) = \sum_k \mathcal{F}_0(k) \mathcal{F}_0(q-k) , \quad (2.37)$$

$$\mathcal{G}_0(k) = M_0^{-1}(k)_{11} = -\frac{i\omega_s + \xi_{\mathbf{k}}}{\omega_s^2 + E_{\mathbf{k}}^2} , \quad (2.38)$$

$$\mathcal{F}_0(k) = M_0^{-1}(k)_{21} = \frac{\Delta_0}{\omega_s^2 + E_{\mathbf{k}}^2} ; \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} S_{eff}^{(3)} = & - \sum_{q_1, q_2, k} \left\{ \frac{1}{3} \mathcal{F}_0(k) \mathcal{F}_0(q_1 - k) \mathcal{F}_0(q_2 - k) \tilde{b}^*(q_1) \tilde{b}^*(-q_2) \tilde{b}^*(q_2 - q_1) \right. \\ & + \frac{1}{3} \mathcal{F}_0(k) \mathcal{F}_0(q_1 - k) \mathcal{F}_0(q_2 - k) \tilde{b}(-q_1) \tilde{b}(q_2) \tilde{b}(q_1 - q_2) \\ & - \mathcal{G}_0(k) \mathcal{G}_0(q_1 - k) \mathcal{F}_0(q_2 - k) \tilde{b}^*(q_1) \tilde{b}(q_2) \tilde{b}(q_1 - q_2) \\ & \left. - \mathcal{G}_0(k) \mathcal{F}_0(q_1 - k) \mathcal{G}_0(q_2 - k) \tilde{b}^*(q_1) \tilde{b}^*(q_2 - q_1) \tilde{b}(q_2) \right\} . \quad (2.40) \end{aligned}$$

In queste espressioni $\mathcal{G}_0(k)$ e $\mathcal{F}_0(k)$ sono le funzioni di Gorkov rispettivamente normale e anomala, e $\Gamma(q)$ è la funzione di vertice (la quale nella fase a simmetria spontaneamente rotta ha componenti normali e anomale) e rappresenta un' ampiezza di scattering generalizzata. Infine, i termini lineari nei campi \tilde{b}^* e \tilde{b} nella (2.31) si annullano in seguito alla richiesta di stazionarietà dell'azione efficace:

$$\frac{\partial S_{eff}}{\partial \Delta_0} = 0. \quad (2.41)$$

Tale richiesta conduce immediatamente all'equazione per il gap di energia

$$\Delta_0 = -\frac{V}{\beta} \sum_k \mathcal{F}_0(k) . \quad (2.42)$$

Occorre puntualizzare che, utilizzando un potenziale di contatto, alcune delle espressioni sopra riportate presentano una divergenza nell'ultravioletto. Questa, tuttavia, può essere facilmente regolarizzata sostituendo la lunghezza di diffusione a_s al posto dell'intensità V dell'interazione attraverso la relazione

$$\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega V} + \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{m}{\mathbf{k}^2} \quad . \quad (2.43)$$

2.2 Espansione in “loop”

Se si desidera studiare le quantità fisiche includendo le fluttuazioni oltre l'approssimazione di campo medio, è necessario scrivere le funzioni di Green fermioniche di particella singola all'ordine λ (approssimazione a un “loop”). Tali funzioni sono date da

$$\langle M_\lambda^{-1}(k, k')_{ii'} \rangle_{S_{eff}/\lambda} \quad (2.44)$$

dove approssimiamo

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}^{-1} &= (M_0^{-1})_{\alpha\beta} - \sqrt{\lambda} (M_0^{-1} M_1 M_0^{-1})_{\alpha\beta} \\ &+ \lambda (M_0^{-1} M_1 M_0^{-1} M_1 M_0^{-1})_{\alpha\beta} + O(\lambda^{\frac{3}{2}}) \quad , \end{aligned} \quad (2.45)$$

in cui gli indici α e β indicano in modo abbreviato $(k, k')_{ii'}$ e si utilizza la notazione

$$\langle f(\tilde{b}^*, \tilde{b}) \rangle_{S_{eff}/\lambda} = \frac{\int \mathcal{D}\tilde{b}^* \mathcal{D}\tilde{b} f(\tilde{b}^*, \tilde{b}) e^{-\frac{S_{eff}}{\lambda}}}{\int \mathcal{D}\tilde{b}^* \mathcal{D}\tilde{b} e^{-\frac{S_{eff}}{\lambda}}} \quad . \quad (2.46)$$

Sviluppando la (2.44) fino all'ordine λ si ottiene (tenendo in conto la (2.31)):

$$\begin{aligned} \langle M_\lambda^{-1}(k, k')_{ii'} \rangle_{S_{eff}/\lambda} &= \delta_{k,k'} M_0^{-1}(k)_{ii'} \\ &+ \lambda \langle [M_0^{-1} M_1 M_0^{-1} M_1 M_0^{-1}]_{kk'}^{ii'} \rangle_{S_{eff}^{(2)}} \\ -\lambda \langle [M_0^{-1} M_1 M_0^{-1}]_{kk'}^{ii'} S_{eff}^{(3)} \rangle_{S_{eff}^{(2)}} &+ O(\lambda^2) \quad . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Tramite il teorema di Wick si possono calcolare i termini di ordine λ nell'equazione (2.47). In questo modo si ottiene:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \lambda \mathbf{G}_0 \mathbf{\Sigma} \mathbf{G}_0 + O(\lambda^2) \quad , \quad (2.48)$$

dove

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathcal{G}(k) & \mathcal{F}(k) \\ \mathcal{F}(k) & -\mathcal{G}(-k) \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} \mathcal{G}_0(k) & \mathcal{F}_0(k) \\ \mathcal{F}_0(k) & -\mathcal{G}_0(-k) \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}(k) & \Sigma_{12}(k) \\ \Sigma_{21}(k) & \Sigma_{22}(k) \end{pmatrix} \quad (2.51)$$

con

$$\Sigma_{11}(k) = -\Sigma_{22}(-k) = -\sum_q \mathcal{G}_0(q-k) \Gamma_{11}(q) \quad , \quad (2.52)$$

$$\Sigma_{12}(k) = \Sigma_{21}(k) = -\Delta_1 + \sum_q \mathcal{F}_0(q-k) \Gamma_{21}(q) \quad . \quad (2.53)$$

Si noti che Δ_1 è lo spostamento all'ordine λ del parametro d'ordine associato alla fase a simmetria rotta. Esso sarà determinato esplicitamente tra breve.

Dalle (2.48) si possono ottenere le grandezze fisiche a particella singola di interesse. In particolare la densità di particelle all'ordine λ è data da

$$n_f = \frac{2}{\beta\Omega} \sum_k e^{i\omega_s \eta} \mathcal{G}(k) \quad (2.54)$$

con $\eta \rightarrow 0^+$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(k) = & \mathcal{G}_0(k) + \lambda [\mathcal{G}_0(k) \Sigma_{11}(k) \mathcal{G}_0(k) \\ & - \mathcal{F}_0(k) \Sigma_{11}(-k) \mathcal{F}_0(k) + 2\mathcal{G}_0(k) \Sigma_{12}(k) \mathcal{F}_0(k)] \quad . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Il parametro d'ordine può essere scritto come

$$\Delta = -\frac{V}{\beta} \sum_k \mathcal{F}(k) = \Delta_0 + \Delta_1 \quad (2.56)$$

dove

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(k) = & \mathcal{F}_0(k) + \lambda [\mathcal{G}_0(k)\Sigma_{11}(k)\mathcal{F}_0(k) \\
& + \mathcal{G}_0(-k)\Sigma_{11}(-k)\mathcal{F}_0(k) + \mathcal{F}_0(k)\Sigma_{12}(k)\mathcal{F}_0(k) \\
& - \mathcal{G}_0(k)\Sigma_{12}(k)\mathcal{G}_0(-k)] .
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Δ_0 è dato dalla (2.42) mentre Δ_1 può essere ottenuto come

$$\Delta_1 = \frac{h}{A(0) + B(0)} \tag{2.58}$$

con

$$\begin{aligned}
h \equiv & - \sum_k \left\{ [\mathcal{G}_0(k)\mathcal{G}_0(-k) - \mathcal{F}_0(k)\mathcal{F}_0(k)] \right. \\
& \times \sum_q \mathcal{F}_0(q-k)\Gamma_{12}(q) \\
& \left. + 2\mathcal{F}_0(k)\mathcal{G}_0(k) \sum_q \mathcal{G}_0(q-k)\Gamma_{11}(q) \right\} .
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Infine, la densità degli stati di particella singola (per componente di spin) all'ordine λ è data da

$$N(\omega) = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \Im G(\mathbf{k}, \omega) \quad , \tag{2.60}$$

in cui $G(\mathbf{k}, \omega)$ è ottenuta dalla (2.55) per mezzo della sostituzione $i\omega_s \rightarrow \omega + i\eta$.

2.3 Risultati analitici per le grandezze fisiche in campo medio

Lo scopo di questo paragrafo è quello di fornire le espressioni analitiche delle grandezze fisiche a livello di campo medio nel limite di temperatura zero, per tutti i valori della variabile adimensionale $k_f \xi_{pair}$. Per raggiungere tale scopo si utilizzano funzioni speciali ben note della fisica-matematica,

ovvero gli integrali ellittici di prima e seconda specie nella forma normale di Legendre.

Innanzitutto riscriviamo le funzioni di Gorkov (2.38) e (2.39) utilizzando la decomposizione in frazioni semplici:

$$\mathcal{G}_0(k) = \frac{u_{\mathbf{k}}^2}{i\omega_s - E_{\mathbf{k}}} + \frac{v_{\mathbf{k}}^2}{i\omega_s + E_{\mathbf{k}}} \quad , \quad (2.61)$$

$$\mathcal{F}_0(k) = -u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{i\omega_s - E_{\mathbf{k}}} - \frac{1}{i\omega_s + E_{\mathbf{k}}} \right) \quad (2.62)$$

in cui

$$u_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \quad (2.63)$$

$$v_{\mathbf{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} \right) \quad (2.64)$$

sono i coefficienti della funzione d'onda BCS

$$|\Phi\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}}c_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger c_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) |0\rangle \quad . \quad (2.65)$$

Nel seguito sarà utilizzato il seguente risultato per la somma sulle frequenze di Matsubara fermioniche [5]

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\beta} \sum_{\omega_s} \frac{e^{i\omega_s \eta}}{i\omega_s - x} = f(x) \quad (2.66)$$

in cui

$$f(x) = \frac{1}{e^{\beta x} + 1} \quad (2.67)$$

è la funzione di distribuzione di Fermi.

Le equazioni per il parametro d'ordine Δ_0 (2.42) e per la densità di particelle $n_f^{(0)}$ (si confronti la (2.54) con \mathcal{G}_0 al posto di \mathcal{G}) si scrivono pertanto nella forma:

$$-\frac{1}{V} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} \tanh \left(\frac{\beta}{2} E_{\mathbf{k}} \right) \quad , \quad (2.68)$$

$$n_f^{(0)} = \frac{2}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 + \frac{2}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}} f(E_{\mathbf{k}}) \quad , \quad (2.69)$$

le quali, nel limite di temperatura zero ($\beta \rightarrow \infty$), si riducono a

$$-\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} - \frac{m}{\mathbf{k}^2} \right) \quad , \quad (2.70)$$

$$n_f^{(0)} = \frac{2}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}}^2 \quad . \quad (2.71)$$

Si noti come nella (2.70) si sia regolarizzata la divergenza nell'ultravioletto introducendo la lunghezza di diffusione a_s per mezzo della (2.43).

Le due equazioni (2.70) e (2.71) sono accoppiate. Fissati quindi i valori della lunghezza di diffusione a_s e della densità di particelle, si possono ottenere i valori corrispondenti del parametro d'ordine Δ_0 e del potenziale chimico μ_0 .

Introducendo la variabile adimensionale

$$x^2 = \frac{k^2}{2m\Delta_0}$$

e ponendo per definizione

$$x_0 \equiv \frac{\mu_0}{\Delta_0} \quad ,$$

$$\xi_x \equiv \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} = x^2 - x_0 \quad ,$$

$$E_x \equiv \frac{E_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} = \sqrt{\xi_x^2 + 1} \quad ,$$

le (2.70) e (2.71) si scrivono rispettivamente nella forma:

$$-\frac{1}{a_s} = \frac{2}{\pi} (2m\Delta_0)^{\frac{1}{2}} J_4(x_0) \quad , \quad (2.72)$$

$$n_f^{(0)} = \frac{1}{2\pi^2} (2m\Delta_0)^{\frac{3}{2}} J_1(x_0) \quad (2.73)$$

in cui abbiamo posto

$$J_1(x_0) = \int_0^\infty dx x^2 \left(1 - \frac{\xi_x}{E_x} \right) , \quad (2.74)$$

$$J_4(x_0) = \int_0^\infty dx x^2 \left(\frac{1}{E_x} - \frac{1}{x^2} \right) . \quad (2.75)$$

Indicando inoltre con

$$\epsilon_f = \frac{k_f^2}{2m} = \frac{(3\pi^2 n_f^{(0)})^{\frac{2}{3}}}{2m}$$

l'energia di Fermi per un sistema di fermioni non interagenti, la (2.73) può essere riscritta nella forma

$$\frac{\Delta_0}{\epsilon_f} = \frac{2}{18^{\frac{1}{3}} J_1^{\frac{2}{3}}} , \quad (2.76)$$

mentre la (2.72) diventa

$$\frac{1}{k_f a_s} = -\frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{18^{\frac{1}{6}} J_1^{\frac{1}{3}}} J_4 . \quad (2.77)$$

Si noti come il secondo membro delle due ultime equazioni dipenda soltanto dal parametro adimensionale x_0 . Se si inverte la (2.77) ottenendo x_0 in funzione di $1/(k_f a_s)$, si può quindi esprimere il parametro d'ordine Δ_0 e il potenziale chimico μ_0 in funzione della variabile adimensionale $1/(k_f a_s)$. Per i motivi già spiegati nell'Introduzione, è preferibile tuttavia esprimere le grandezze fisiche in funzione di $k_f \xi_{pair}$.

A tale scopo calcoliamo la lunghezza di coerenza ξ_{pair} definita da

$$\xi_{pair}^2 = \frac{\langle \phi_{\mathbf{k}} | r^2 | \phi_{\mathbf{k}} \rangle}{\langle \phi_{\mathbf{k}} | \phi_{\mathbf{k}} \rangle} , \quad (2.78)$$

in cui

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{\Delta_0}{2E_{\mathbf{k}}}$$

rappresenta la “funzione d'onda di coppia”. Dalla (2.78) si ottiene

$$\xi_{pair}^2 = \frac{\sum_{\mathbf{k}} |\nabla_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}}|^2}{\sum_{\mathbf{k}} |\phi_{\mathbf{k}}|^2} = \frac{1}{m^2} \frac{\int_0^\infty dk \frac{k^4 \xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^6}}{\int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_{\mathbf{k}}^2}} . \quad (2.79)$$

I due integrali che compaiono al secondo membro della (2.79) possono essere espressi nella forma:

$$\int_0^\infty dk \frac{k^4 \xi_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}^6} = \frac{(2m\Delta_0)^{\frac{5}{2}}}{\Delta_0^4} J_2(x_0) \quad (2.80)$$

$$\int_0^\infty dk \frac{k^2}{E_{\mathbf{k}}^2} = \frac{(2m\Delta_0)^{\frac{3}{2}}}{\Delta_0^2} J_3(x_0) \quad (2.81)$$

in cui abbiamo posto

$$J_2(x_0) \equiv \int_0^\infty dx x^4 \frac{\xi_x^2}{E_x^6} = \frac{\pi}{16} \frac{x_1 + x_1^5}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \quad , \quad (2.82)$$

$$J_3(x_0) \equiv \int_0^\infty dx \frac{x^2}{E_x^2} = \frac{\pi}{2} x_1 \quad , \quad (2.83)$$

$$x_1^2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_0^2 + 1} + x_0 \right) \quad . \quad (2.84)$$

La (2.79) allora si scrive

$$\xi_{pair}^2 = \frac{1}{4m\Delta_0} \frac{1 + x_1^4}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \quad , \quad (2.85)$$

ovvero, moltiplicando ambo i membri per k_f^2 e utilizzando la (2.76),

$$k_f^2 \xi_{pair}^2 = \frac{\sqrt[3]{18}}{4} \frac{1 + x_1^4}{\sqrt{x_0^2 + 1}} J_1(x_0)^{\frac{2}{3}} \quad . \quad (2.86)$$

Restano da valutare gli integrali $J_1(x_0)$ e $J_4(x_0)$, i quali sono classificati in letteratura come integrali ellittici (si consulti l'Appendice A per la loro definizione e per le loro principali proprietà). A tale scopo introduciamo i due integrali ausiliari

$$J_5(x_0) \equiv \int_0^\infty dx x^2 \frac{1}{E_x^3} \quad , \quad (2.87)$$

$$J_6(x_0) \equiv \int_0^\infty dx x^2 \frac{\xi_x}{E_x^3} \quad , \quad (2.88)$$

ed esprimiamo le grandezze fisiche di interesse (ovvero, il parametro d'ordine Δ_0 , il potenziale chimico μ_0 , l' energia dello stato legato per il problema a due corpi nel vuoto ϵ_0 , la velocità del suono s , la lunghezza di coerenza di fase ξ_{phase} , etc.) in funzione di $J_5(x_0)$ e $J_6(x_0)$.

Tali integrali ausiliari possono essere ricondotti alla forma normale di Legendre, scrivendo

$$J_5(x_0) = \sqrt[4]{x_0^2 + 1} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{1}{4x_0^2 \sqrt[4]{x_0^2 + 1}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad , \quad (2.89)$$

$$J_6(x_0) = \frac{1}{2\sqrt[4]{x_0^2 + 1}} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad , \quad (2.90)$$

in cui $F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ e $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ sono integrali ellittici di prima e seconda specie nella forma normale di Legendre, e il modulo k è dato da

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right) \quad . \quad (2.91)$$

Integrando per parti si può esprimere $J_1(x_0)$ dato dalla (2.74) come combinazione lineare di J_5 e di J_6 :

$$J_1(x_0) = \frac{2}{3} (J_6 + x_0 J_5) \quad ; \quad (2.92)$$

analogamente si ottiene per $J_4(x_0)$ dato dalla (2.75)

$$J_4(x_0) = 2 (x_0 J_6 - J_5) \quad . \quad (2.93)$$

In definitiva si ottengono i seguenti risultati rispettivamente per le (2.86), (2.77) e (2.76):

$$k_f \xi_{pair} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1 + x_0^4}}{\sqrt[4]{x_0^2 + 1}} (x_0 J_5 + J_6)^{\frac{1}{3}} \quad , \quad (2.94)$$

$$\frac{1}{k_f a_s} = -\frac{4}{\pi} \frac{x_0 J_6 - J_5}{(x_0 J_5 + J_6)^{\frac{1}{3}}} \quad , \quad (2.95)$$

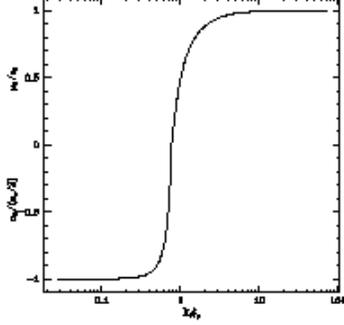


Figura 2.1: Potenziale chimico μ_0 in funzione di $k_f \xi_{pair}$ ottenuto con i metodi analitici proposti in questa tesi

$$\frac{\Delta_0}{\epsilon_f} = \frac{1}{(x_0 J_5 + J_6)^{\frac{2}{3}}} \quad , \quad (2.96)$$

$$\frac{\mu_0}{\epsilon_f} = x_0 \frac{\Delta_0}{\epsilon_f} = \frac{x_0}{(x_0 J_5 + J_6)^{\frac{2}{3}}} \quad . \quad (2.97)$$

Ricordiamo inoltre che l'energia dello stato legato ϵ_0 per il problema a due corpi nel vuoto è definita dalla relazione

$$\frac{1}{\Omega V} = -\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\frac{\mathbf{k}^2}{m} + \epsilon_0} \quad , \quad (2.98)$$

la quale per la (2.43) diventa

$$\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{m}{\mathbf{k}^2} - \frac{1}{\frac{\mathbf{k}^2}{m} + \epsilon_0} \right) \quad . \quad (2.99)$$

Il membro di destra della (2.99) può essere valutato facilmente e fornisce il risultato

$$\frac{m}{4\pi a_s} = \frac{m}{4\pi} \sqrt{m\epsilon_0} \quad .$$

Questa relazione dimostra che lo stato legato esiste solo se

$$\frac{1}{a_s} \geq 0$$

con

$$\epsilon_0 = \frac{1}{ma_s^2} \quad . \quad (2.100)$$

Si ottiene cosí

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_f} = \frac{2}{k_f^2 a_s^2} = \frac{32}{\pi^2} \frac{(x_0 J_6 - J_5)^2}{(x_0 J_5 + J_6)^{\frac{2}{3}}} \quad , \quad (2.101)$$

che permette di esprimere ϵ_0/ϵ_f in funzione di $k_f \xi_{pair}$ una volta invertita la (2.94).

Calcoliamo infine la densità degli stati di particella singola (per componente di spin) a livello di campo medio. La funzione di Green ritardata $G_0(\mathbf{k}, \omega)$ di particella singola è ottenuta dalla (2.61) per mezzo della sostituzione $i\omega_s \rightarrow \omega + i\eta$ con η infinitesimo positivo. Poiché

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\eta} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) - i\pi \delta(x) \quad (2.102)$$

dove \mathcal{P} denota il valore principale, la parte immaginaria della $G_0(\mathbf{k}, \omega)$ è data da

$$\Im G_0(\mathbf{k}, \omega) = -\pi u_{\mathbf{k}}^2 \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \pi v_{\mathbf{k}}^2 \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \quad . \quad (2.103)$$

La densità degli stati in approssimazione di campo medio si scrive pertanto nella forma

$$N^{(0)}(\omega) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}}^2 \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) + v_{\mathbf{k}}^2 \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right) \quad (2.104)$$

dove si può sostituire la somma sul vettore d'onda \mathbf{k} con un integrale. Per procedere ulteriormente è necessario trovare i valori del modulo k del vettore d'onda che soddisfano le condizioni

$$\omega - E_{\mathbf{k}} = 0 \quad ,$$

$$\omega + E_{\mathbf{k}} = 0 \quad .$$

A tale scopo definiamo il gap per le eccitazioni di particella singola, corrispondente al minimo dell'energia delle quasiparticelle di Bogoliubov, come

$$E_{gap} \equiv \min_k E_{\mathbf{k}} \quad . \quad (2.105)$$

Si trova che il gap di energia coincide con il parametro d'ordine Δ_0 finché il potenziale chimico μ_0 è positivo (essendo il minimo a $k^2/(2m) = \mu_0$), mentre per μ_0 negativo, il minimo è a $k = 0$ e il gap d'energia differisce dal parametro d'ordine Δ_0 . Riassumendo:

$$E_{gap} = \begin{cases} \Delta_0 & \text{se } \mu_0 \geq 0 \\ \sqrt{\mu_0^2 + \Delta_0^2} & \text{se } \mu_0 < 0 \end{cases} \quad . \quad (2.106)$$

Se poniamo per definizione

$$k_1 = \sqrt{2m\mu_0 + 2m\sqrt{\omega^2 - \Delta_0^2}} \quad ,$$

$$k_2 = \sqrt{2m\mu_0 - 2m\sqrt{\omega^2 - \Delta_0^2}} \quad ,$$

le soluzioni dell'equazione

$$\omega - E_{\mathbf{k}} = 0$$

sono le seguenti:

$$k = \begin{cases} k_1 & \text{se } |\omega| > \sqrt{\mu_0^2 + \Delta_0^2} \\ k_1 \text{ e } k_2 & \text{se } \mu_0 > 0, |\omega| > \Delta_0, |\omega| < \sqrt{\mu_0^2 + \Delta_0^2} \\ \text{nessuna} & \text{se } |\omega| < E_{gap} \end{cases} \quad .$$

Utilizzando le proprietà della funzione δ di Dirac si ottiene inoltre

$$\begin{aligned} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) &= \theta(\omega - E_{gap}) \frac{m}{k_1} \frac{E_{k_1}}{|\xi_{k_1}|} \delta(k - k_1) \\ &+ \theta(\mu_0) \theta(\omega - \Delta_0) \theta\left(\sqrt{\mu_0^2 + \Delta_0^2} - \omega\right) \frac{m}{k_2} \frac{E_{k_2}}{|\xi_{k_2}|} \delta(k - k_2) \quad , \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) &= \theta(-\omega - E_{gap}) \frac{m}{k_1} \frac{E_{k_1}}{|\xi_{k_1}|} \delta(k - k_1) \\ &+ \theta(\mu_0) \theta(-\omega - \Delta_0) \theta\left(\sqrt{\mu_0^2 + \Delta_0^2} + \omega\right) \frac{m}{k_2} \frac{E_{k_2}}{|\xi_{k_2}|} \delta(k - k_2) \quad , \end{aligned} \quad (2.108)$$

dove

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2.109)$$

è la funzione di Heaviside. Utilizzando le (2.107) e (2.108) e introducendo le variabili adimensionali

$$\omega_0 = \frac{\omega}{\Delta_0} \quad ,$$

$$\omega_{gap} = \frac{E_{gap}}{\Delta_0} \quad ,$$

si ottiene finalmente

$$\begin{aligned} N^{(0)}(\omega_0) &= \frac{1}{2} N_0 \left(\frac{\Delta_0}{\epsilon_f} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left\{ \sqrt{x_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1}} \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} + 1 \right) \theta(\omega_0 - \omega_{gap}) \right. \\ &\quad + \sqrt{x_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 1}} \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} - 1 \right) \\ &\quad \times \theta(\omega_0 - 1) \theta(\sqrt{x_0^2 + 1} - \omega_0) \theta(x_0) \\ &\quad + \sqrt{x_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 1}} \left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} + 1 \right) \\ &\quad \times \theta(-\omega_0 - 1) \theta(\sqrt{x_0^2 + 1} + \omega_0) \theta(x_0) \\ &\quad \left. + \sqrt{x_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1}} \left(-\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} - 1 \right) \theta(-\omega_0 - \omega_{gap}) \right\} \end{aligned} \quad (2.110)$$

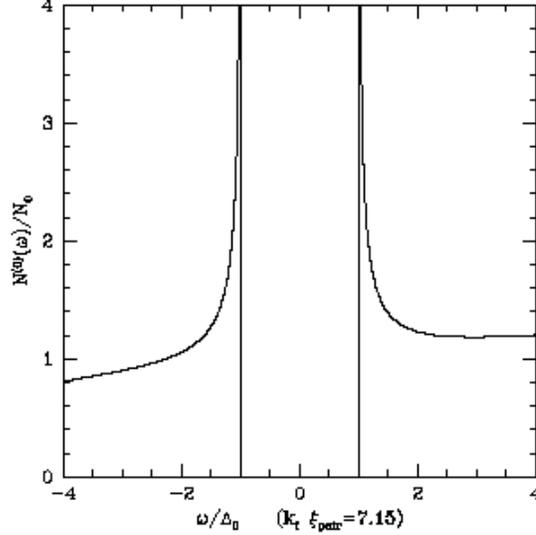


Figura 2.2: Densità degli stati di particella singola in funzione dell'energia ω per $k_f \xi_{pair} = 7.15$

in cui

$$N_0 = \frac{mk_f}{2\pi^2}$$

è la densità degli stati per proiezione di spin sulla superficie di Fermi nello stato normale. Sostituita la (2.96) nella (2.110), ancora una volta si vede che la densità degli stati, funzione di ω_0 , dipende parametricamente soltanto da x_0 , al quale è associato univovamente un determinato valore della variabile adimensionale $k_f \xi_{pair}$.

Nelle Figure 2.2 – 2.4 riportiamo l'andamento della densità degli stati, data dalla (2.110), per alcuni valori di $k_f \xi_{pair}$. Nel limite BCS ($k_f \xi_{pair} \gg 1$) la densità degli stati $N^{(0)}(\omega)$ è una funzione approssimativamente pari di ω nell'intorno dello zero dell'energia che corrisponde al valore del potenziale chimico μ_0 per quel dato accoppiamento. Si noti anche la caratteristica assenza di stati tra $\omega = -\Delta_0$ e $\omega = +\Delta_0$, che indica la presenza di un gap di energia nello spettro delle eccitazioni di particella singola. All'aumentare dell'intensità dell'interazione attrattiva tra fermioni (ovvero al diminuire di

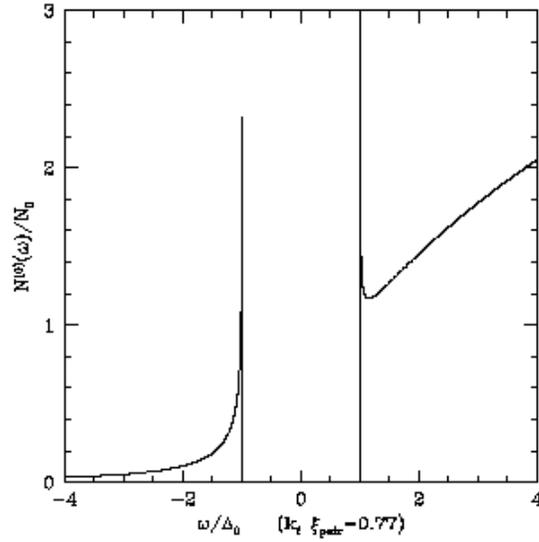


Figura 2.3: Densità degli stati di particella singola in funzione dell'energia ω per $k_f \xi_{pair} = 0.77$

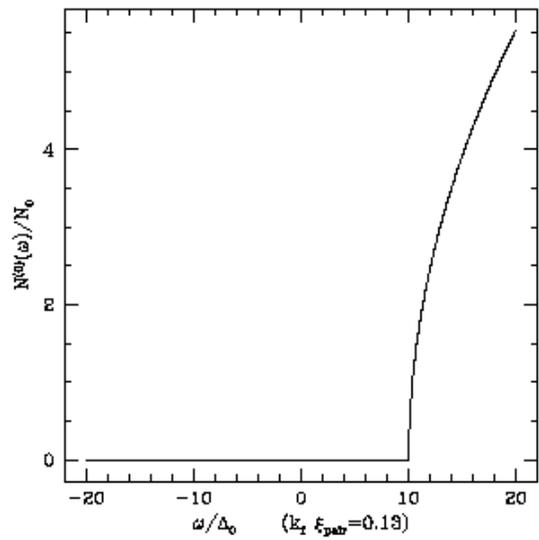


Figura 2.4: Densità degli stati di particella singola in funzione dell'energia ω per $k_f \xi_{pair} = 0.135$

$k_f \xi_{pair}$) si può notare una sempre più marcata asimmetria nella densità degli stati, che cambia drasticamente il suo carattere quando il potenziale chimico diventa negativo (si veda la figura 2.4).

I risultati sopra esposti sono validi per un sistema tridimensionale. È interessante riportare per confronto i risultati, già noti analiticamente in letteratura [7], per un sistema bidimensionale. Le uniche differenze sono date dal fatto che, in 2D, non si definisce la lunghezza di diffusione a_s ma direttamente l'energia dello stato legato per il problema a due corpi nel vuoto (che esiste per qualsiasi valore dell'intensità V del potenziale attrattivo) e dal fatto che, sempre in 2D, si ha

$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \dots \rightarrow \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \dots = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk k \dots \quad .$$

Le espressioni delle varie grandezze fisiche in funzione del parametro adimensionale x_0 sono notevolmente più semplici nel caso bidimensionale rispetto a quello tridimensionale, e sono date nell'ordine da

$$k_f^2 \xi_{pair}^2 = \frac{1}{4} \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1} \right) \left(x_0 + \frac{x_0^2 + 2}{x_0^2 + 1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \arctan x_0} \right) \quad , \quad (2.111)$$

$$\frac{\Delta_0}{\epsilon_f} = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + 1} + x_0} \quad , \quad (2.112)$$

$$\frac{\mu_0}{\epsilon_f} = \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1} + x_0} \quad , \quad (2.113)$$

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_f} = 2 \frac{\sqrt{x_0^2 + 1} - x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1} + x_0} \quad , \quad (2.114)$$

$$N^{(0)}(\omega_0) = \frac{m}{4\pi} \left\{ \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} + 1 \right) \theta \left(\omega_0 - \sqrt{x_0^2 + 1} \right) \right. \\ \left. - \left(\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} + 1 \right) \theta \left(-\omega_0 - \sqrt{x_0^2 + 1} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} \theta(\omega_0 - 1) \theta\left(\sqrt{x_0^2 + 1} - \omega_0\right) \theta(x_0) \\
& - \frac{2\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} \theta(-\omega_0 - 1) \theta\left(\sqrt{x_0^2 + 1} + \omega_0\right) \theta(x_0) \left. \right\} . \quad (2.115)
\end{aligned}$$

Esaminiamo adesso per completezza i due limiti estremi di debole e forte accoppiamento, ove le espressioni sopra riportate possono essere considerevolmente semplificate. Il limite BCS (di accoppiamento debole) è caratterizzato dalla condizione $V \rightarrow 0^-$ (ovvero $1/a_s \rightarrow -\infty$), la quale implica che il parametro d'ordine Δ_0 risulta molto minore del potenziale chimico μ_0 . Per $x_0 \gg 1$, utilizzando le approssimazioni per gli integrali ellittici di prima e seconda specie per $k \rightarrow 1$ (si veda l'Appendice A), si ottiene

$$J_5(x_0) = \sqrt{x_0} \quad , \quad (2.116)$$

$$J_6(x_0) = \frac{\log 8x_0}{2\sqrt{x_0}} \quad . \quad (2.117)$$

Inserendo le (2.116) e (2.117) nelle (2.94) – (2.97) si ottiene all'ordine dominante per un sistema tridimensionale:

$$k_f \xi_{pair} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 \quad , \quad (2.118)$$

$$\frac{1}{k_f a_s} \approx -\frac{2}{\pi} \log \frac{8x_0}{e^2} \quad , \quad (2.119)$$

$$\frac{\Delta_0}{\epsilon_f} \approx \frac{1}{x_0} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_f \xi_{pair}} \approx \frac{8}{e^2} e^{\frac{\pi}{2k_f a_s}} \quad , \quad (2.120)$$

$$\frac{\mu}{\epsilon_f} \approx 1 \quad . \quad (2.121)$$

Per un sistema bidimensionale nel limite BCS si ottengono invece i seguenti risultati:

$$k_f \xi_{pair} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} x_0 \quad , \quad (2.122)$$

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_f} \approx \frac{1}{2x_0^2} \approx \frac{1}{4} \frac{1}{k_f^2 \xi_{pair}^2} \quad , \quad (2.123)$$

$$\frac{\Delta_0}{\epsilon_f} \approx \frac{1}{x_0} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_f \xi_{pair}} \quad , \quad (2.124)$$

$$\frac{\mu}{\epsilon_f} \approx 1 \quad . \quad (2.125)$$

Come si può constatare nel limite BCS i risultati sono indipendenti dalla dimensionalità del sistema. Inoltre, risulta $k_f \xi_{pair} \gg 1$, ovvero la distanza media dei fermioni che formano una coppia di Cooper è molto maggiore della distanza media ($1/k_f$) tra particelle.

Il limite di Bose-Einstein (di accoppiamento forte) è invece caratterizzato dalla condizione $V \rightarrow \infty$ ($1/a_s \rightarrow \infty$). In questo caso il potenziale chimico μ_0 diventa negativo e in modulo molto maggiore del parametro d'ordine.

Utilizzando le approssimazioni per gli integrali ellittici di prima e seconda specie per $k \rightarrow 0$ si ottiene:

$$J_5(x_0) \approx \frac{\pi}{16} \frac{1}{|x_0|^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{15}{32} \frac{1}{x_0^2} \right) \quad , \quad (2.126)$$

$$J_6(x_0) \approx \frac{\pi}{4} \frac{1}{|x_0|^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{3}{16} \frac{1}{x_0^2} \right) \quad . \quad (2.127)$$

Inserendo le (2.126) e (2.127) nelle (2.94) – (2.97) e (2.101) si ottiene (in 3D):

$$k_f \xi_{pair} \approx (3\pi)^{\frac{1}{3}} 2^{-\frac{11}{6}} |x_0|^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad (2.128)$$

$$\frac{1}{k_f a_s} \approx \left(\frac{16}{3\pi} \right)^{\frac{1}{3}} |x_0|^{\frac{2}{3}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{k_f \xi_{pair}} \quad , \quad (2.129)$$

$$\frac{\Delta_0}{\epsilon_f} \approx 8 \sqrt[3]{\frac{|x_0|}{18\pi^2}} \approx \frac{2\sqrt[4]{8}}{\sqrt{3\pi}} \frac{1}{\sqrt{k_f \xi_{pair}}} \quad , \quad (2.130)$$

$$\frac{\mu_0}{\epsilon_f} \approx -8 \sqrt[3]{\frac{|x_0|^4}{18\pi^2}} \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{k_f^2 \xi_{pair}^2} \quad , \quad (2.131)$$

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_f} \approx 2 \left(\frac{16}{3\pi} \right)^{\frac{2}{3}} |x_0|^{\frac{4}{3}} \approx \frac{1}{k_f^2 \xi_{pair}^2} \quad , \quad (2.132)$$

$$\frac{2\mu}{\epsilon_0} \approx -1 + \frac{1}{8x_0^2} \approx -1 + \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} (k_f \xi_{pair})^3 \quad . \quad (2.133)$$

Il limite di Bose-Einstein conduce invece ai risultati seguenti per il caso di un sistema bidimensionale:

$$k_f \xi_{pair} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{|x_0|} \quad , \quad (2.134)$$

$$\frac{\epsilon_0}{\epsilon_f} \approx 8x_0^2 \approx \frac{1}{k_f^2 \xi_{pair}^2} \quad , \quad (2.135)$$

$$\frac{\Delta_0}{\epsilon_f} \approx 4|x_0| \approx \frac{\sqrt{2}}{k_f \xi_{pair}} \quad , \quad (2.136)$$

$$\frac{\mu}{\epsilon_f} \approx -4x_0^2 \approx -\frac{1}{2} \frac{1}{k_f^2 \xi_{pair}^2} \quad , \quad (2.137)$$

$$\frac{2\mu}{\epsilon_0} \approx -1 + \frac{1}{4x_0^2} \approx -1 + 2k_f^2 \xi_{pair}^2 \quad . \quad (2.138)$$

Si noti che nel limite di Bose-Einstein alcuni dei risultati precedenti dipendono dalla dimensionalità del sistema. In questo regime abbiamo sostanzialmente un sistema di bosoni composti debolmente interagenti tra loro perché la separazione spaziale dei fermioni di una coppia è molto minore della distanza media tra particelle.

Capitolo 3

Spettro delle eccitazioni collettive

Questo capitolo è dedicato essenzialmente allo studio dello spettro delle eccitazioni collettive, come determinato dai poli della funzione di vertice ritardata $\Gamma(\mathbf{q}, \omega)$. Si studierà analiticamente lo spettro nella regione dei “piccoli” q (dove q è il modulo della quantità di moto di una coppia) evidenziando l’evoluzione della velocità del suono dal limite BCS al limite BE. Si analizzeranno poi le proprietà dello spettro intorno a $2\Delta_0$ nel limite BCS, dove un’eccitazione decade in due quasiparticelle. Quindi si mostrerà come la relazione di dispersione si approssimi per “grandi” q a quella di due fermioni nel vuoto (nel limite BE). Infine si utilizzerà il calcolo numerico per illustrare il comportamento dello spettro per valori di q “intermedi”.

3.1 Studio dei poli della funzione di vertice per “piccoli” q e ω : evoluzione della velocità del suono dal limite BCS al limite BE

La funzione di vertice si ottiene invertendo la (2.35):

$$\Gamma(q) = \frac{1}{D(q)} \begin{pmatrix} A(-q) & -B(q) \\ -B(q) & A(q) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

in cui

$$D(q) = A(q)A(-q) - B(q)^2 \quad (3.2)$$

e le funzioni $A(q)$ e $B(q)$ sono date rispettivamente dalle (2.36) e (2.37). Lo spettro delle eccitazioni collettive è dato dai poli di $\Gamma(q)$ dopo aver effettuato la continuazione analitica $i\omega_\nu \rightarrow \omega + i\eta$.

Valutiamo innanzitutto la somma sulle frequenze di Matsubara fermioniche nelle (2.36) e (2.37) utilizzando le (2.61) e (2.62) e la (2.66):

$$\begin{aligned} A(q) &= \beta \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} (1 - 2f(E_{\mathbf{k}})) \\ &\quad - \beta \sum_{\mathbf{k}} \left\{ (1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{u_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\omega_\nu} + \frac{v_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\omega_\nu} \right) \\ &\quad \left. + (f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) - f(E_{\mathbf{k}})) \left(\frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\omega_\nu} + \frac{v_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\omega_\nu} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} B(q) &= \beta \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \left\{ (1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})) \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\omega_\nu} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\omega_\nu} \right) \\ &\quad \left. + (f(E_{\mathbf{k}}) - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})) \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\omega_\nu} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\omega_\nu} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

in cui nella (3.3) si è utilizzata la (2.68).

Effettuando la continuazione analitica $i\omega_\nu \rightarrow \omega + i\eta$, considerando il limite di temperatura zero in cui la funzione di distribuzione di Fermi si riduce a $f(x) = \theta(-x)$ e sostituendo la somma sul vettore d'onda \mathbf{k} con un integrale, le (3.3) e (3.4) si scrivono rispettivamente:

$$A(\mathbf{q}, \omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} - \frac{u_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega - i\eta} - \frac{v_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega + i\eta} \right) \quad (3.5)$$

$$B(\mathbf{q}, \omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \times \left(\frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega - i\eta} + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega + i\eta} \right) \quad (3.6)$$

in cui d è la dimensionalità del sistema e il fattore $\beta\Omega$ è stato ommesso per comodità, dato che ciò non influenza il calcolo dei poli della funzione di vertice.

Effettuando il cambiamento di variabile $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}/2$ le (3.5) e (3.6) si scrivono

$$A(\mathbf{q}, \omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} - \frac{u_+^2 u_-^2}{E_+ + E_- - \omega - i\eta} - \frac{v_+^2 v_-^2}{E_+ + E_- + \omega + i\eta} \right) \quad (3.7)$$

$$B(\mathbf{q}, \omega) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} u_+ v_+ u_- v_- \times \left(\frac{1}{E_+ + E_- - \omega - i\eta} + \frac{1}{E_+ + E_- + \omega + i\eta} \right) \quad (3.8)$$

con

$$E_+ = E_{\mathbf{k}+\frac{\mathbf{q}}{2}} \quad , \quad E_- = E_{\mathbf{k}-\frac{\mathbf{q}}{2}} \quad .$$

Ricordiamo che poli isolati nella funzione di vertice, corrispondenti a zeri della $D(\mathbf{q}, \omega)$, sono associati a un modo collettivo, o stato legato, mentre un taglio rappresenta invece il continuo degli stati di diffusione a due quasiparticelle. L'inizio degli stati del continuo è dato dalla relazione

$$\omega_q^* \equiv \min_k (E_+ + E_-) = \begin{cases} 2\Delta_0 & \text{se } q < q_0 \\ \sqrt{4\Delta_0^2 + \left(\frac{q^2}{4m} - 2\mu_0\right)^2} & \text{se } q \geq q_0 \end{cases} \quad (3.9)$$

in cui

$$q_0 = \sqrt{8m\mu_0}$$

[d'ora in avanti q indicherà non più il quadrimomento bensì il modulo del vettore \mathbf{q}].

Il calcolo delle (3.7) e (3.8) per “piccoli” q e ω , ovvero per

$$\frac{q^2}{2m\omega_0^*} \ll 1 \quad , \quad \frac{\omega}{\omega_0^*} \ll 1 \quad ,$$

può essere eseguito analiticamente con approssimazioni controllabili. Utilizzando in modo sistematico i primi termini dello sviluppo in serie binomiale

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots \quad ,$$

le (3.7) e (3.8) si scrivono al quarto ordine in q e ω :

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}, \omega) = & \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{\Delta_0^2}{4E_{\mathbf{k}}^3} + \frac{2\xi_{\mathbf{k}}^3 - \xi_{\mathbf{k}}\Delta_0^2}{E_{\mathbf{k}}^5} \frac{q^2}{32m} \right. \\ & + \frac{8\xi_{\mathbf{k}}^2\Delta_0^2 + 3\Delta_0^4}{E_{\mathbf{k}}^7} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{32m^2} - \frac{4\xi_{\mathbf{k}}^4 - 10\xi_{\mathbf{k}}^2\Delta_0^2 + \Delta_0^4}{E_{\mathbf{k}}^7} \frac{q^4}{2^9m^2} \\ & - \frac{40\xi_{\mathbf{k}}^3\Delta_0^2 + 5\xi_{\mathbf{k}}\Delta_0^4}{E_{\mathbf{k}}^9} \frac{q^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{2^8m^3} + \frac{48\xi_{\mathbf{k}}^4\Delta_0^2 - 30\xi_{\mathbf{k}}^2\Delta_0^4 - 15\Delta_0^6}{E_{\mathbf{k}}^{11}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^4}{2^9m^4} \\ & + \left(-\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{4E_{\mathbf{k}}^3} + \frac{2\xi_{\mathbf{k}}^2 - \Delta_0^2}{E_{\mathbf{k}}^5} \frac{q^2}{32m} + \frac{5\xi_{\mathbf{k}}\Delta_0^2}{E_{\mathbf{k}}^7} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{32m^2} \right) \omega \\ & + \left(-\frac{2\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}{16E_{\mathbf{k}}^5} + \frac{6\xi_{\mathbf{k}}^3 + \xi_{\mathbf{k}}\Delta_0^2}{E_{\mathbf{k}}^7} \frac{q^2}{2^7m} + \frac{12\xi_{\mathbf{k}}^2\Delta_0^2 + 5\Delta_0^4}{E_{\mathbf{k}}^9} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{2^7m^2} \right) \omega^2 \\ & \left. - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{16E_{\mathbf{k}}^5} \omega^3 - \frac{2\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}{64E_{\mathbf{k}}^7} \omega^4 \right\} \quad (3.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{q}, \omega) = & \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \left\{ \frac{\Delta_0^2}{4E_{\mathbf{k}}^3} - \frac{3\xi_{\mathbf{k}}\Delta_0^2}{E_{\mathbf{k}}^5} \frac{q^2}{32m} \right. \\
& + \frac{2\xi_{\mathbf{k}}^2\Delta_0^2 - 3\Delta_0^4}{E_{\mathbf{k}}^7} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{32m^2} + \frac{12\xi_{\mathbf{k}}^2\Delta_0^2 - 3\Delta_0^4}{E_{\mathbf{k}}^7} \frac{q^4}{2^9m^2} \\
& - \frac{10\xi_{\mathbf{k}}^3\Delta_0^2 - 25\xi_{\mathbf{k}}\Delta_0^4}{E_{\mathbf{k}}^9} \frac{q^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{2^8m^3} + \frac{8\xi_{\mathbf{k}}^4\Delta_0^2 - 40\xi_{\mathbf{k}}^2\Delta_0^4 + 15\Delta_0^6}{E_{\mathbf{k}}^{11}} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^4}{2^9m^4} \\
& \left. + \left(\frac{\Delta_0^2}{16E_{\mathbf{k}}^5} - \frac{5\xi_{\mathbf{k}}\Delta_0^2}{E_{\mathbf{k}}^7} \frac{q^2}{2^7m} + \frac{2\xi_{\mathbf{k}}^2\Delta_0^2 - 5\Delta_0^4}{E_{\mathbf{k}}^9} \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{2^7m^2} \right) \omega^2 + \frac{\Delta_0^2}{64E_{\mathbf{k}}^7} \omega^4 \right\} \quad (3.11)
\end{aligned}$$

3.1.1 Caso bidimensionale

Esaminiamo il caso in cui $d = 2$. Passando in coordinate polari, integrando sulla variabile angolare e ponendo

$$x = \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \quad , \quad x_0 = \frac{\mu_0}{\Delta_0} \quad ,$$

le (3.10) e (3.11) si scrivono nella forma:

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{q}, \omega) = & I_1 + I_2 q^2 + I_3 q^4 + I_4 \omega + I_5 q^2 \omega \\
& + I_6 \omega^2 + I_7 q^2 \omega^2 + I_8 \omega^3 + I_9 \omega^4 \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(\mathbf{q}, \omega) = & I_1 + I_{10} q^2 + I_{11} q^4 + I_{12} \omega^2 \\
& + I_{13} q^2 \omega^2 + I_{14} \omega^4 \quad (3.13)
\end{aligned}$$

in cui

$$I_1 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \quad , \quad (3.14)$$

$$I_2 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{16m\Delta_0} \left(\frac{2x^3 - x}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(8x^2 + 3)(x_0 + x)}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} \right) \quad , \quad (3.15)$$

$$I_3 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{2^7 m^2 \Delta_0^2} \left(-\frac{4x^4 - 10x^2 + 1}{2(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} - \frac{(40x^3 + 5x)(x_0 + x)}{(x^2 + 1)^{\frac{9}{2}}} + \frac{3}{4} \frac{(48x^4 - 30x^2 - 15)(x_0 + x)^2}{(x^2 + 1)^{\frac{11}{2}}} \right) , \quad (3.16)$$

$$I_4 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \left(-\frac{1}{2\Delta_0} \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) , \quad (3.17)$$

$$I_5 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{16m\Delta_0^2} \left(\frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{5x(x_0 + x)}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} \right) , \quad (3.18)$$

$$I_6 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \left(-\frac{1}{8\Delta_0^2} \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) , \quad (3.19)$$

$$I_7 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{2^6 m \Delta_0^3} \left(\frac{6x^3 + x}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} + \frac{(12x^2 + 5)(x_0 + x)}{(x^2 + 1)^{\frac{9}{2}}} \right) , \quad (3.20)$$

$$I_8 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \left(-\frac{1}{8\Delta_0^3} \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) , \quad (3.21)$$

$$I_9 = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \left(-\frac{1}{32\Delta_0^4} \frac{2x^2 + 1}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} \right) , \quad (3.22)$$

$$I_{10} = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{16m\Delta_0} \left(-\frac{3x}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(2x^2 - 3)(x_0 + x)}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} \right) , \quad (3.23)$$

$$I_{11} = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{2^7 m^2 \Delta_0^2} \left(\frac{12x^2 - 3}{2(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} - \frac{(10x^3 - 25x)(x_0 + x)}{(x^2 + 1)^{\frac{9}{2}}} + \frac{3}{4} \frac{(8x^4 - 40x^2 + 15)(x_0 + x)^2}{(x^2 + 1)^{\frac{11}{2}}} \right) , \quad (3.24)$$

$$I_{12} = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \left(\frac{1}{8\Delta_0^2} \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}} \right) , \quad (3.25)$$

$$I_{13} = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{2^6 m \Delta_0^3} \left(-\frac{5x}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} + \frac{(2x^2 - 5)(x_0 + x)}{(x^2 + 1)^{\frac{9}{2}}} \right) , \quad (3.26)$$

$$I_{14} = \frac{m}{4\pi} \int_{-x_0}^{\infty} dx \left(\frac{1}{32\Delta_0^4} \frac{1}{(x^2 + 1)^{\frac{7}{2}}} \right) . \quad (3.27)$$

Definendo inoltre

$$a \equiv 2I_1(I_2 - I_{10}) \quad (3.28)$$

$$b \equiv 2I_1(I_6 - I_{12}) - I_4^2 \quad (3.29)$$

$$c \equiv I_2^2 - I_{10}^2 + 2I_1(I_3 - I_{11}) \quad (3.30)$$

$$d \equiv 2I_1(I_7 - I_{13}) + 2I_2I_6 - 2I_4I_5 - 2I_{10}I_{12} \quad (3.31)$$

$$e \equiv I_6^2 - I_{12}^2 + 2I_1(I_9 - I_{14}) - 2I_4I_8 , \quad (3.32)$$

l'equazione

$$D(\mathbf{q}, \omega) = 0 \quad (3.33)$$

può essere espressa nella forma

$$a q^2 + b \omega^2 + c q^4 + d q^2 \omega^2 + e \omega^4 = 0 , \quad (3.34)$$

la cui soluzione è data da

$$\omega_b(q)^2 = s^2 q^2 + \gamma \left(\frac{q^2}{4m} \right)^2 \quad (3.35)$$

con

$$s^2 = -\frac{a}{b} \quad (3.36)$$

e

$$\gamma = -16m^2 \left(\frac{c}{b} - \frac{ad}{b^2} + \frac{a^2e}{b^3} \right) . \quad (3.37)$$

Nel caso bidimensionale che stiamo trattando gli integrali $I_1 - I_{14}$ sono elementari. Si ottiene per essi:

$$I_1 = \frac{m}{8\pi} \left(1 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right) , \quad (3.38)$$

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{24\Delta_0} \left(4x_0 + \frac{4x_0^4 + 9x_0^2 + 4}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) , \quad (3.39)$$

$$I_3 - I_{11} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{32m\Delta_0^2} \left(2x_0^2 + 1 + 2x_0\sqrt{x_0^2 + 1} \right) , \quad (3.40)$$

$$I_4 = -\frac{1}{4\pi} \frac{m}{2\Delta_0} \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + 1}} , \quad (3.41)$$

$$I_5 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{24\Delta_0^2} \left(1 + \frac{x_0^3}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) , \quad (3.42)$$

$$I_6 = -\frac{1}{4\pi} \frac{m}{24\Delta_0^2} \left(4 + \frac{4x_0^3 + 3x_0}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) , \quad (3.43)$$

$$I_7 - I_{13} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{48\Delta_0^3} \left(4x_0 + \frac{4x_0^4 + 6x_0^2 + 3}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) , \quad (3.44)$$

$$I_8 = -\frac{1}{4\pi} \frac{m}{24\Delta_0^3} \frac{1}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} , \quad (3.45)$$

$$I_9 - I_{14} = -\frac{1}{12\pi} \frac{m}{16\Delta_0^4} \left(2 + \frac{2x_0^3 + 3x_0}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) , \quad (3.46)$$

$$I_{10} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{24\Delta_0} \left(2x_0 + \frac{2x_0^4 + 3x_0^2 + 2}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) , \quad (3.47)$$

$$I_{12} = \frac{1}{4\pi} \frac{m}{24\Delta_0^2} \left(2 + \frac{2x_0^3 + 3x_0}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) . \quad (3.48)$$

Sostituendo le (3.38) – (3.48) nelle (3.28) – (3.32) si ha:

$$a = \frac{m}{(4\pi)^2} \frac{1}{4\Delta_0} \left(1 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right) \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1} \right) \quad (3.49)$$

$$b = - \left(\frac{m}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{2\Delta_0^2} \left(1 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right) \quad (3.50)$$

$$c = - \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{96\Delta_0^2} \left(8x_0^2 - 1 + \frac{2}{x_0^2 + 1} + \frac{8x_0^3 + 3x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} + \frac{2x_0}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (3.51)$$

$$d = \frac{m}{(4\pi)^2} \frac{1}{48\Delta_0^3} \left(4x_0 + \frac{4x_0^4 + 6x_0^2 + 3}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (3.52)$$

$$e = - \frac{m^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{48\Delta_0^4} \left(2 + \frac{2x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} + \frac{1}{x_0^2 + 1} + \frac{2x_0}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad (3.53)$$

Utilizzando le (3.49) – (3.53), si ottengono finalmente i seguenti risultati per la velocità del suono s data dalla (3.36) e per il coefficiente γ dato dalla (3.37):

$$s^2 = \frac{\Delta_0}{2m} \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1} \right) \quad (3.54)$$

$$\gamma = \frac{4x_0^2 + 1 - 8x_0\sqrt{x_0^2 + 1}}{6\sqrt{x_0^2 + 1}(\sqrt{x_0^2 + 1} - x_0)} \quad (3.55)$$

Ricordando la (2.112), la (3.54) diventa semplicemente

$$s^2 = \frac{\epsilon_f}{m} \quad (3.56)$$

ovvero

$$s = \frac{c_f}{\sqrt{2}} \quad (3.57)$$

dove

$$c_f = \frac{k_f}{m} \quad (3.58)$$

è la velocità di Fermi. Per un sistema 2D la velocità del suono rimane quindi costante al variare della variabile adimensionale $k_f \xi_{pair}$. Per un sistema 3D si otterrà un risultato completamente diverso.

Analizziamo ora il comportamento del coefficiente γ nei due limiti estremi di accoppiamento debole e forte. Nel limite BCS ($k_f \xi_{pair} \gg 1$) si ottiene

$$\gamma \approx -\frac{4}{3}x_0^2 \approx -\frac{8}{3}(k_f \xi_{pair})^2 \quad . \quad (3.59)$$

Si noti come il fatto che γ sia negativo in questo limite introduce un vettore d'onda di taglio caratteristico $q_c \approx 1/\xi_{pair}$, oltre il quale la frequenza caratteristica (3.35) diventa immaginaria. Ciò sta a significare che la lunghezza d'onda delle eccitazioni non può essere più piccola della dimensione caratteristica di una coppia di Cooper.

Nel limite di Bose-Einstein ($k_f \xi_{pair} \ll 1$) si ha invece

$$\gamma \approx 1 - \frac{1}{3x_0^2} \approx 1 - \frac{8}{3}(k_f \xi_{pair})^2 \quad . \quad (3.60)$$

Se si definiscono un potenziale chimico per i bosoni composti

$$\mu_b \equiv \epsilon_0 + 2\mu_0 = 2\epsilon_f \quad , \quad (3.61)$$

una massa bosonica

$$m_b \equiv 2m \quad , \quad (3.62)$$

una densità bosonica

$$n_b \equiv \frac{n}{2} = \frac{m_b}{4\pi} \epsilon_f \quad (3.63)$$

e un potenziale di interazione tra bosoni

$$U_0 \equiv \frac{8\pi}{m_b} \quad , \quad (3.64)$$

allora si deduce facilmente che nel limite BE lo spettro delle eccitazioni collettive dato dalla (3.35) assume la ben nota forma di Bogoliubov

$$\omega_b(q)^2 \approx \frac{n_b U_0}{m_b} q^2 + \left(\frac{q^2}{2m_b} \right)^2 \quad . \quad (3.65)$$

3.1.2 Caso tridimensionale

Esaminiamo ora il caso in cui $d = 3$. Passando in coordinate polari e integrando sulle variabili angolari, le (3.10) e (3.11) si possono ancora scrivere nella forma data rispettivamente dalle (3.12) e (3.13), dove però in questo caso i coefficienti sono dati dalle espressioni seguenti:

$$I_1 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\Delta_0^2}{E_k^3} \quad , \quad (3.66)$$

$$I_2 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{k^2}{8m} \frac{\frac{8}{3}\xi_k^2 \Delta_0^2 + \Delta_0^4}{E_k^7} + \frac{1}{8m} \frac{2\xi_k^3 - \xi_k \Delta_0^2}{E_k^5} \right) \quad , \quad (3.67)$$

$$I_3 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{k^4}{27m^4} \frac{\frac{48}{5}\xi_k^4 \Delta_0^2 - 6\xi_k^2 \Delta_0^4 - 3\Delta_0^6}{E_k^{11}} - \frac{k^2}{3 \cdot 2^6 m^3} \frac{40\xi_k^3 \Delta_0^2 + 5\xi_k \Delta_0^4}{E_k^9} - \frac{1}{27m^2} \frac{4\xi_k^4 - 10\xi_k^2 \Delta_0^2 + \Delta_0^4}{E_k^7} \right) \quad , \quad (3.68)$$

$$I_4 = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\xi_k}{E_k^3} \quad , \quad (3.69)$$

$$I_5 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{k^2}{24m^2} \frac{5\xi_k \Delta_0^2}{E_k^7} + \frac{1}{8m} \frac{2\xi_k^2 - \Delta_0^2}{E_k^5} \right) \quad , \quad (3.70)$$

$$I_6 = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{2\xi_k^2 + \Delta_0^2}{4E_k^5} \quad , \quad (3.71)$$

$$I_7 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{k^2}{32m^2} \frac{4\xi_k^2 \Delta_0^2 + \frac{5}{3}\Delta_0^4}{E_k^9} + \frac{1}{32m} \frac{6\xi_k^3 + \xi_k \Delta_0^2}{E_k^7} \right) \quad , \quad (3.72)$$

$$I_8 = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\xi_k}{4E_k^5} \quad , \quad (3.73)$$

$$I_9 = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{2\xi_k^2 + \Delta_0^2}{16E_k^7} \quad , \quad (3.74)$$

$$I_{10} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{k^2}{8m} \frac{\frac{2}{3}\xi_k^2 \Delta_0^2 - \Delta_0^4}{E_k^7} - \frac{1}{8m} \frac{3\xi_k \Delta_0^2}{E_k^5} \right) , \quad (3.75)$$

$$I_{11} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{k^4}{2^7 m^4} \frac{\frac{8}{5}\xi_k^4 \Delta_0^2 - 8\xi_k^2 \Delta_0^4 + 3\Delta_0^6}{E_k^{11}} \right. \\ \left. + \frac{k^2}{3 \cdot 2^6 m^3} \frac{-10\xi_k^3 \Delta_0^2 + 25\xi_k \Delta_0^4}{E_k^9} + \frac{1}{2^7 m^2} \frac{12\xi_k^2 \Delta_0^2 - 3\Delta_0^4}{E_k^7} \right) , \quad (3.76)$$

$$I_{12} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\Delta_0^2}{4E_k^5} , \quad (3.77)$$

$$I_{13} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \left(\frac{k^2}{32m^2} \frac{\frac{2}{3}\xi_k^2 \Delta_0^2 - \frac{5}{3}\Delta_0^4}{E_k^9} - \frac{1}{32m} \frac{5\xi_k \Delta_0^2}{E_k^7} \right) , \quad (3.78)$$

$$I_{14} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk k^2 \frac{\Delta_0^2}{16E_k^7} . \quad (3.79)$$

Introduciamo ora le seguenti variabili adimensionali [si confronti la sezione 2.3]

$$x^2 = \frac{k^2}{2m\Delta_0} , \quad x_0 = \frac{\mu_0}{\Delta_0} \quad (3.80)$$

$$\xi_x = x^2 - x_0 , \quad E_x = \sqrt{\xi_x^2 + 1} \quad (3.81)$$

e gli integrali ausiliari

$$J_5(x_0) = \int_0^\infty dx x^2 \frac{1}{E_x^3} \quad (3.82)$$

$$J_6(x_0) = \int_0^\infty dx x^2 \frac{\xi_x}{E_x^3} \quad (3.83)$$

$$J_7(x_0) = \int_0^\infty dx x^2 \frac{1}{E_x^5} \quad (3.84)$$

$$J_8(x_0) = \int_0^\infty dx x^2 \frac{\xi_x}{E_x^5} \quad (3.85)$$

$$J_9(x_0) = \int_0^\infty dx x^2 \frac{\xi_x^2}{E_x^5} \quad (3.86)$$

$$J_{10}(x_0) = \int_0^\infty dx x^2 \frac{\xi_x^3}{E_x^5} \quad (3.87)$$

$$J_{11}(x_0) = \int_0^\infty dx x^4 \frac{1}{E_x^7} \quad (3.88)$$

$$J_{12}(x_0) = \int_0^\infty dx x^4 \frac{\xi_x}{E_x^7} \quad (3.89)$$

$$J_{13}(x_0) = \int_0^\infty dx x^4 \frac{\xi_x^2}{E_x^7} \quad (3.90)$$

$$J_{14}(x_0) = \int_0^\infty dx x^6 \frac{1}{E_x^9} \quad (3.91)$$

$$J_{15}(x_0) = \int_0^\infty dx x^6 \frac{\xi_x^2}{E_x^9} \quad (3.92)$$

Allora le (3.66) – (3.79) si possono riscrivere nella forma

$$I_1 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} 2m \sqrt{2m\Delta_0} L_1 \quad (3.93)$$

$$I_2 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m}{\Delta_0}} L_2 \quad (3.94)$$

$$I_3 - I_{11} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} (2m\Delta_0)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2^6 m^2 \Delta_0^3} (L_3 - L_{11}) \quad (3.95)$$

$$I_4 = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Delta_0}} L_4 \quad (3.96)$$

$$I_5 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{(2m\Delta_0)^{\frac{3}{2}}}{8m\Delta_0^3} L_5 \quad (3.97)$$

$$I_6 = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \left(\frac{2m}{\Delta_0} \right)^{\frac{3}{2}} L_6 \quad (3.98)$$

$$I_7 - I_{13} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} (2m\Delta_0)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{16m\Delta_0^4} (L_7 - L_{13}) \quad (3.99)$$

$$I_8 = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\Delta_0^4} (2m\Delta_0)^{\frac{3}{2}} L_8 \quad (3.100)$$

$$I_9 - I_{14} = -\frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{8\Delta_0^2} \left(\frac{2m}{\Delta_0}\right)^{\frac{3}{2}} (L_9 - L_{14}) \quad (3.101)$$

$$I_{10} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m}{\Delta_0}} L_{10} \quad (3.102)$$

$$I_{12} = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \left(\frac{2m}{\Delta_0}\right)^{\frac{3}{2}} L_{12} \quad (3.103)$$

dove

$$L_1 = J_5(x_0) \quad (3.104)$$

$$L_2 = 2J_{10}(x_0) - J_8(x_0) + \frac{16}{3}J_{13}(x_0) + 2J_{11}(x_0) \quad (3.105)$$

$$L_3 - L_{11} = 16J_{15}(x_0) - 12J_{14}(x_0) - 20J_{12}(x_0) - 2J_9(x_0) + J_7(x_0) \quad (3.106)$$

$$L_4 = J_6(x_0) \quad (3.107)$$

$$L_5 = \frac{10}{3}J_{12}(x_0) + 2J_9(x_0) - J_7(x_0) \quad (3.108)$$

$$L_6 = 2J_9(x_0) + J_7(x_0) \quad (3.109)$$

$$L_7 - L_{13} = \frac{10}{3}J_{11}(x_0) + 3J_8(x_0) \quad (3.110)$$

$$L_8 = J_8(x_0) \quad (3.111)$$

$$L_9 - L_{14} = J_7(x_0) \quad (3.112)$$

$$L_{10} = \frac{4}{3}J_{13}(x_0) - 2J_{11}(x_0) - 3J_8(x_0) \quad (3.113)$$

$$L_{12} = J_7(x_0) \quad (3.114)$$

Si ottiene così che nel caso 3D la velocità del suono s è data da

$$s^2 = \frac{\Delta_0}{8m} \frac{a^*}{b^*} \quad , \quad (3.115)$$

ed il coefficiente γ della relazione di dispersione (3.35) è dato da

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{c^*}{b^*} + \frac{1}{8} \frac{a^* d^*}{b^{*2}} + \frac{1}{64} \frac{a^{*2} e^*}{b^{*3}} \quad (3.116)$$

dove adesso

$$a^* = 2L_1(L_2 - L_{10}) \quad (3.117)$$

$$b^* = \frac{1}{2}L_1(L_6 + L_{12}) + L_4^2 \quad (3.118)$$

$$c^* = L_2^2 - L_{10}^2 + 2L_1(L_3 - L_{11}) \quad (3.119)$$

$$d^* = 2L_1(L_7 - L_{13}) - L_2L_6 + 4L_4L_5 - L_{10}L_{12} \quad (3.120)$$

$$e^* = L_6^2 - L_{12}^2 - 4L_1(L_9 - L_{14}) - 8L_4L_8 \quad . \quad (3.121)$$

Passiamo a calcolare gli integrali dati dalle (3.82) – (3.92). I primi due sono già stati utilizzati nel Capitolo 2 e sono riconducibili alla forma normale di Legendre per mezzo delle (2.89) e (2.90). I restanti integrali possono essere espressi come combinazioni lineari di $J_5(x_0)$ e $J_6(x_0)$. Si ottiene:

$$J_8(x_0) = \frac{x_0 J_5(x_0) + J_6(x_0)}{6(x_0^2 + 1)} \quad (3.122)$$

$$J_7(x_0) = \frac{1}{2}J_5(x_0) + x_0J_8(x_0) \quad (3.123)$$

$$J_9(x_0) = \frac{1}{2}J_5(x_0) - x_0J_8(x_0) \quad (3.124)$$

$$J_{10}(x_0) = -\frac{1}{6}x_0J_5(x_0) + \frac{5}{6}J_6(x_0) + x_0^2J_8(x_0) \quad (3.125)$$

$$J_{11}(x_0) = \frac{4}{5}x_0J_7(x_0) + \frac{1}{2}J_8(x_0) \quad (3.126)$$

$$J_{12}(x_0) = \frac{3}{10}J_7(x_0) \quad (3.127)$$

$$J_{13}(x_0) = \frac{1}{5}x_0J_7(x_0) + \frac{1}{2}J_8(x_0) \quad (3.128)$$

$$J_{14}(x_0) = \frac{1}{2}J_{12}(x_0) + \frac{6}{7}x_0J_{11}(x_0) \quad (3.129)$$

$$J_{15}(x_0) = \frac{1}{7}x_0J_{11}(x_0) + \frac{1}{2}J_{12}(x_0). \quad (3.130)$$

Normalizzando la velocità s del suono rispetto alla velocità c_f di Fermi e utilizzando la (2.96), si ottiene

$$\frac{s^2}{c_f^2} = \frac{1}{3} \sqrt[3]{x_0J_5(x_0) + J_6(x_0)} \frac{J_5(x_0)}{J_5(x_0)^2 + J_6(x_0)^2} \quad (3.131)$$

Si noti come la (3.131) sia valida *per tutti* i valori della variabile adimensionale $k_f\xi_{pair}$. È quindi possibile seguire *analiticamente* l'evoluzione della velocità del suono e, piú in generale, dello spettro delle eccitazioni collettive, dal modo di Anderson nel limite di accoppiamento debole al modo di Bogoliubov nel limite di accoppiamento forte.

In particolare, nel limite BCS ($k_f\xi_{pair} \gg 1$) si ottiene

$$s \approx \frac{c_f}{\sqrt{3}} \quad , \quad (3.132)$$

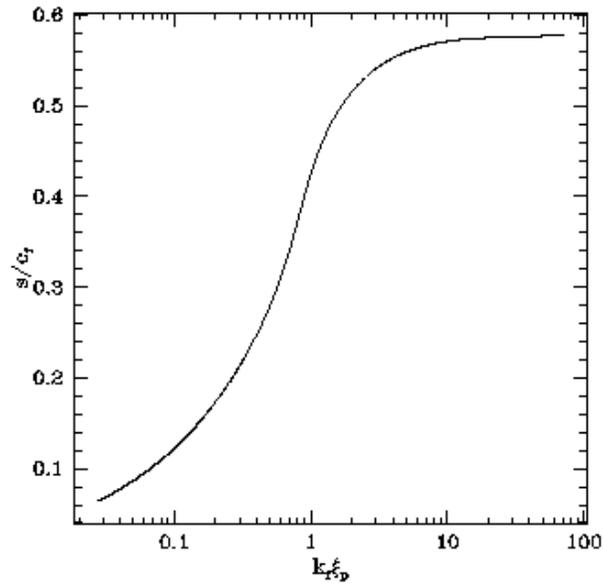


Figura 3.1: Velocità del suono s in funzione di $k_f \xi_{pair}$

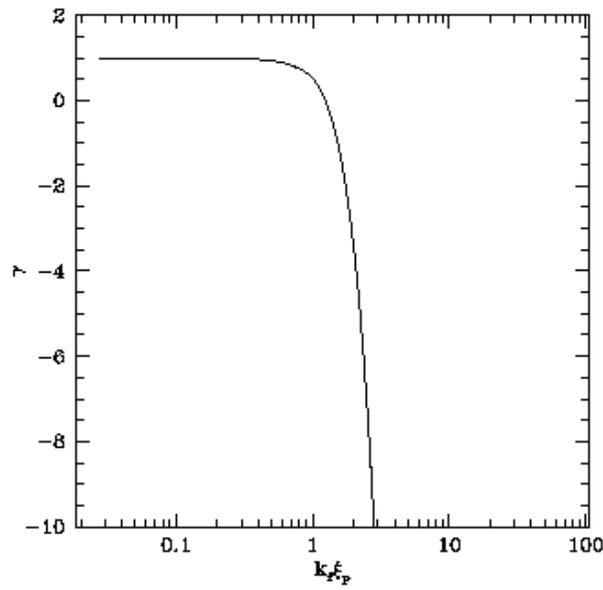


Figura 3.2: γ in funzione di $k_f \xi_{pair}$

$$\gamma \approx -\frac{128}{135}x_0^2 \approx -\frac{256}{135}(k_f\xi_{pair})^2 \quad , \quad (3.133)$$

mentre nel limite Bose-Einstein ($k_f\xi_{pair} \ll 1$) si ottiene

$$\frac{s^2}{c_f^2} \approx \frac{1}{2\sqrt[3]{18\pi^2}}|x_0|^{-\frac{2}{3}} \approx \frac{\sqrt{2}}{3\pi}k_f\xi_{pair} \quad , \quad (3.134)$$

$$\gamma \approx 1 - \frac{1}{8x_0^2} \approx 1 - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}(k_f\xi_{pair})^3 \quad . \quad (3.135)$$

3.2 Decadimento di un'eccitazione collettiva in due quasiparticelle

Il problema del decadimento di un'eccitazione in due quasiparticelle è stato affrontato su basi generali da Pitaevskii [6]. Descriviamo brevemente che cosa succede nel caso in cui lo spettro delle eccitazioni di una quasiparticella sia dato da $E_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}$. Indichiamo con q_c il valore critico per cui $\omega_b(q_c) = 2\Delta_0$. Se q soddisfa le condizioni

$$q < q_c \quad , \quad \frac{q_c - q}{q_c} \ll 1 \quad (3.136)$$

e ω si trova nella regione specificata dalle condizioni

$$\omega < 2\Delta_0 \quad , \quad \frac{2\Delta_0 - \omega}{2\Delta_0} \ll 1 \quad , \quad (3.137)$$

allora il contributo principale nell'integrale delle (3.5) e (3.6) proviene dalla regione dello spazio \mathbf{k} per la quale

$$|\mathbf{k}| \approx k_0 \equiv \sqrt{2m\mu_0}$$

$$|\mathbf{q} - \mathbf{k}| \approx k_0 \quad .$$

Lo spettro delle eccitazioni di quasiparticella può allora essere approssimato come segue:

$$E_{\mathbf{k}} \approx \Delta_0 + \frac{1}{m} \frac{\mu_0}{\Delta_0} (k - k_0)^2 \quad . \quad (3.138)$$

Inserendo la (3.138) nelle (3.5) e (3.6) e trascurando la dipendenza da \mathbf{k} dei fattori $u_{\mathbf{k}}$ e $v_{\mathbf{k}}$, si perviene al risultato

$$A(\mathbf{q}, \omega) \propto \frac{c_1}{\sqrt{q_0 - q_c}} \log \frac{\Delta_0}{2\Delta_0 - \omega} \quad , \quad (3.139)$$

$$B(\mathbf{q}, \omega) \propto \frac{c_2}{\sqrt{q_0 - q_c}} \log \frac{\Delta_0}{2\Delta_0 - \omega} \quad , \quad (3.140)$$

dove c_1 e c_2 sono costanti e $q_0 = 2k_0$. La funzione di vertice (3.1) allora si approssima a

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \approx a_{ij} \left(q - q_c - \sqrt{q_0 - q_c} \frac{\alpha_1}{\log \frac{2\Delta_0 - \omega}{\alpha_2}} \right)^{-1} \quad (3.141)$$

dove a_{ij} , α_1 e α_2 sono altre costanti. I poli della (3.141) sono dati da

$$\omega_b(q) = 2\Delta_0 - \alpha_2 \exp \left(-\alpha_1 \frac{\sqrt{q_0 - q_c}}{q_c - q} \right) \quad . \quad (3.142)$$

Si vede quindi che, per $q \rightarrow q_c$, $\omega_b(q)$ tende a $2\Delta_0$ con un andamento esponenziale. Nel limite BCS si è constatato con l'ausilio del calcolo numerico che, nel caso tridimensionale, non ci sono modi collettivi per $q > q_c$. Inoltre si ha $q_c \propto 1/\xi_{pair}$ e ciò indica che la lunghezza d'onda di una data eccitazione non può essere più piccola della separazione spaziale di una coppia di Cooper.

All' aumentare dell' accoppiamento q_c aumenta e q_0 diminuisce: pertanto da un certo valore di $k_f \xi_{pair}$ in poi il punto critico q_c cessa di esistere e ci sono eccitazioni per ogni valore di q .

3.3 Relazione di dispersione per “grandi” q

In particolare, se la lunghezza di diffusione a_s é positiva ed esiste lo stato legato per il problema a due corpi nel vuoto, è possibile calcolare analiticamente la relazione di dispersione per “grandi” q . Infatti nell'ipotesi che

$$\frac{q}{q_0} \gg 1 \quad \left(q_0 = \sqrt{8m\mu_0} \right) \quad (3.143)$$

si possono calcolare le (3.7) e (3.8) approssimando

$$u_+^2 u_-^2 \approx 1 \quad (3.144)$$

$$v_+^2 v_-^2 \approx 0 \quad (3.145)$$

$$E_+ + E_- \approx \xi_+ + \xi_- = \frac{k^2}{m} + \frac{q^2}{4m} - 2\mu_0 \quad . \quad (3.146)$$

Le (3.7) e (3.8) pertanto diventano:

$$A(\mathbf{q}, \omega) \approx \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{\frac{k^2}{m} + \epsilon_0} - \frac{1}{\xi_+ + \xi_- - \omega - i\eta} \right) \quad (3.147)$$

$$B(\mathbf{q}, \omega) \approx 0 \quad , \quad (3.148)$$

da cui si deduce che

$$\omega_b(q) \approx \frac{q^2}{4m} - 2\mu - \epsilon_0 \quad . \quad (3.149)$$

Questa non è altro che la relazione di dispersione di due particelle nel vuoto il cui momento totale è q e la cui energia di legame è ϵ_0 .

Per grandi valori di q il numero di stati, nello spazio delle fasi, già occupati da altre particelle del mezzo, è trascurabile. Pertanto gli effetti del principio di esclusione di Pauli, importanti per valori piccoli e intermedi di q sono adesso irrilevanti e il problema del calcolo della relazione di dispersione viene ad essere, come si è visto, semplificato considerevolmente.

3.4 Analisi numerica dello spettro delle eccitazioni collettive

Per valori di q “intermedi” lo spettro delle eccitazioni collettive, identificato dal polo isolato della funzione di vertice, deve essere calcolato numericamente.

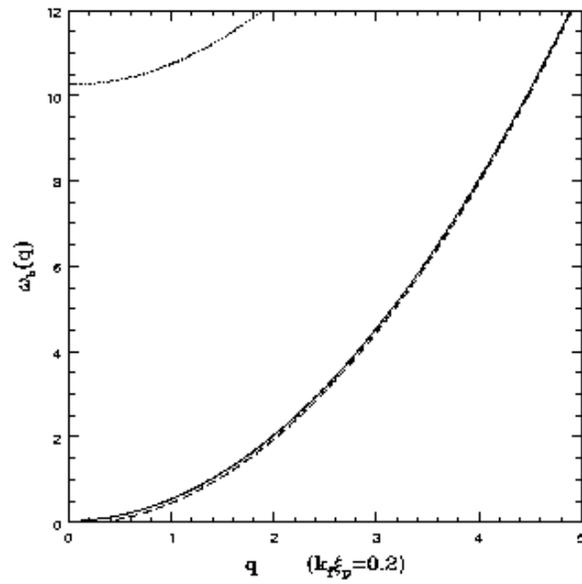


Figura 3.3: Spettro delle eccitazioni collettive per $k_f \xi_{pair} = 0.2$

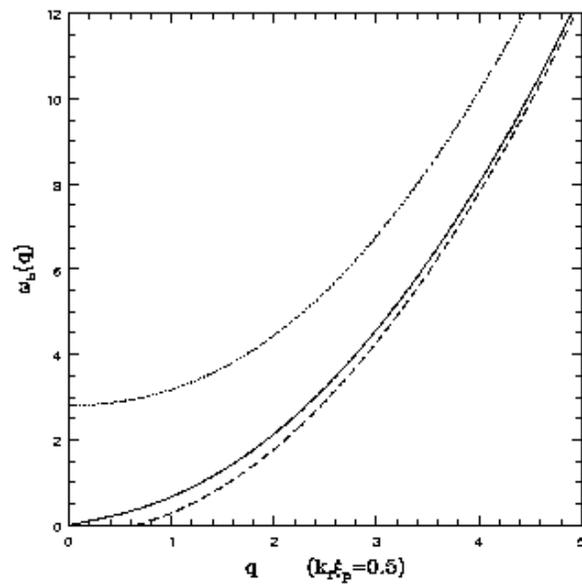


Figura 3.4: Spettro delle eccitazioni collettive per $k_f \xi_{pair} = 0.5$

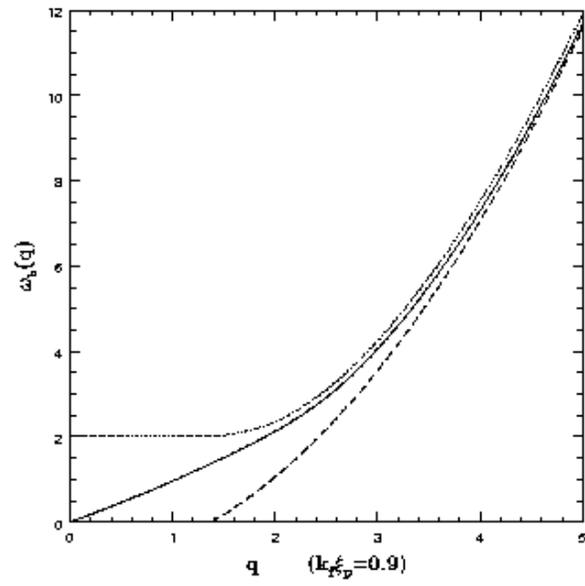


Figura 3.5: Spettro delle eccitazioni collettive per $k_f \xi_{pair} = 0.9$

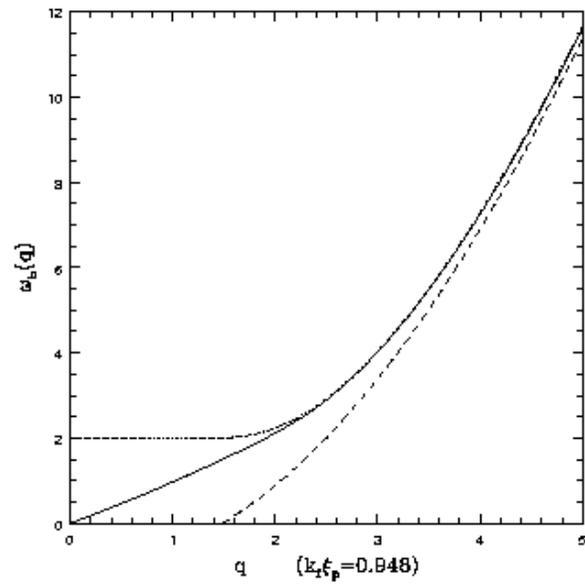


Figura 3.6: Spettro delle eccitazioni collettive per $k_f \xi_{pair} = 0.948$

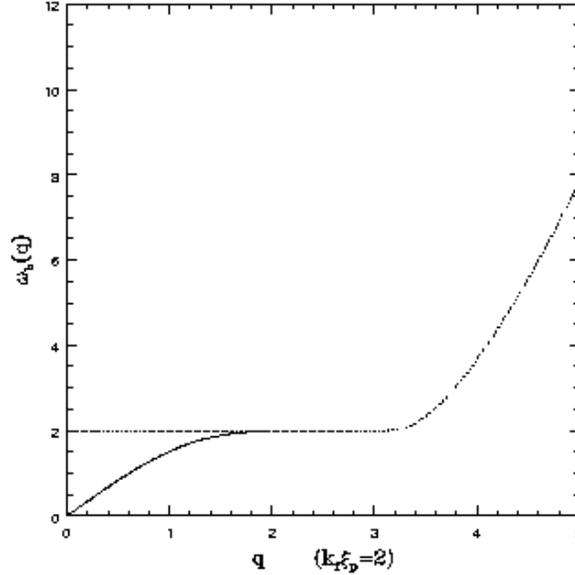


Figura 3.7: Spettro delle eccitazioni collettive per $k_f \xi_{pair} = 2$

Mostriamo l'andamento dello spettro delle eccitazioni collettive per alcuni valori della variabile adimensionale $k_f \xi_{pair}$ nelle Figure 3.3 – 3.7, dove $\omega_b(q)$ è in unità Δ_0 e il modulo del vettore d'onda \mathbf{q} è in unità $\sqrt{2m\Delta_0}$. Si noti come in Figura 3.7 l'andamento dello spettro sia inizialmente lineare per poi assumere un andamento esponenziale fino ad un valore critico q_c , dove l'eccitazione collettiva decade in due quasiparticelle. La curva tratteggiata rappresenta infatti l'inizio degli stati del continuo a due quasiparticelle. Aumentando il valore del parametro di accoppiamento, $k_f \xi_{pair}$ diminuisce ed inizia ad esistere lo stato legato per il problema a due corpi nel vuoto. In Figura 3.5 si vede che lo spettro delle eccitazioni collettive (a tratto continuo) non incontra mai l'inizio degli stati del continuo (a tratteggio breve) e tende per grandi valori di q alla relazione di dispersione per due particelle nel vuoto (a tratteggio lungo). Nel limite BE lo spettro (si veda la Figura 3.3) è sostanzialmente quello di Bogoliubov di un sistema di bosoni composti debolmente interagenti. Si noti come l'inizio degli stati del continuo si sposti a energie sempre più elevate.

Capitolo 4

Studio della dipendenza da ω della funzione di vertice per momento del centro di massa nullo

Ricordiamo dalla teoria dello scattering che l'ampiezza di diffusione $f(E, \theta)$, funzione dell'energia E e dell'angolo di diffusione θ , ammette, quali singolarità sul foglio fisico della superficie di Riemann di \sqrt{E} , un taglio lungo il semiasse reale positivo e poli semplici sul semiasse reale negativo. Tali singolarità dell'ampiezza di diffusione sul foglio fisico coincidono con lo spettro dell'hamiltoniana del sistema di due particelle interagenti: gli stati legati permessi dal potenziale sono poli di $f(E, \theta)$ per $E < 0$, mentre gli stati del continuo, che possono avere qualsiasi $E > 0$, costituiscono il taglio di $f(E, \theta)$. Le risonanze sono invece poli sul foglio non fisico della superficie di Riemann di \sqrt{E} : il loro effetto sulla sezione d'urto è tanto più evidente quanto più il polo è vicino al taglio sull'asse reale. Infine, gli stati virtuali sono poli sul semiasse reale negativo del foglio non fisico.

Scopo del presente capitolo è la ricerca di quasirisonanze nella funzione di vertice ritardata $\Gamma(\mathbf{q}, \omega)$, la quale rappresenta un'ampiezza di diffusione generalizzata per il problema di un sistema a molti corpi. Viste le difficoltà di calcolo, si studia qui la funzione di vertice soltanto per momento del centro di massa $|\mathbf{q}| = 0$. Il risultato, riguardo l'esistenza di quasirisonanze

nella funzione di vertice, è negativo, sebbene bisogna puntualizzare che l'analisi qui riportata è lungi dall'essere completa (perché potrebbero esistere quasirisonanze per momenti del centro di massa $q \neq 0$).

Nonostante tutto, è stato rilevato un interessante comportamento per il modulo quadro $|D(0, \omega)|^2$ del denominatore comune alla componente normale e a quella anomala della funzione di vertice. Esso infatti mostra una struttura alquanto marcata per accoppiamenti intermedi ($k_f \xi_{pair} \approx 1$), che svanisce drasticamente sia nel limite BCS che nel limite Bose-Einstein. Sebbene non possiamo stabilire niente di quantitativo sull'argomento, è probabile che una tale struttura influenzi profondamente alcune grandezze fisiche, le quali mostrerebbero così un comportamento peculiare soltanto se il superconduttore si trovasse nella regione intermedia tra accoppiamento debole e accoppiamento forte.

4.1 Metodo di calcolo per la ricerca delle quasirisonanze

La ricerca delle quasirisonanze nella funzione di vertice $\Gamma(q)$ consiste nel risolvere l'equazione

$$D(q) = 0 \quad (4.1)$$

dopo aver effettuato la continuazione analitica $i\omega_\nu \rightarrow \omega + i\eta$. Poniamo $|\mathbf{q}| = 0$ e consideriamo la sola dipendenza da ω nelle (3.5) e (3.6), le quali diventano

$$A(\omega) = K_d \int_0^\infty dk k^{d-1} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} - \frac{u_{\mathbf{k}}^4}{2E_{\mathbf{k}} - \omega - i\eta} - \frac{v_{\mathbf{k}}^4}{2E_{\mathbf{k}} + \omega + i\eta} \right) \quad (4.2)$$

$$B(\omega) = K_d \int_0^\infty dk k^{d-1} \frac{\Delta_0^2}{4E_{\mathbf{k}}^2} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{k}} - \omega - i\eta} + \frac{1}{2E_{\mathbf{k}} + \omega + i\eta} \right) \quad (4.3)$$

in cui

$$(2\pi)^d K_d = \frac{d\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}$$

é l' area della superficie della sfera unitaria d -dimensionale [Γ è la funzione di Eulero].

Le funzioni $A(\omega)$ e $B(\omega)$ sono funzioni complesse della variabile complessa $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Utilizzando la (2.102), la parte reale e la parte immaginaria delle (4.2) e (4.3) sull' asse reale si scrivono

$$A_R(\omega) = K_d \mathcal{P} \int_0^\infty dk k^{d-1} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} - \frac{u_{\mathbf{k}}^4}{2E_{\mathbf{k}} - \omega} - \frac{v_{\mathbf{k}}^4}{2E_{\mathbf{k}} + \omega} \right) \quad (4.4)$$

$$A_I(\omega) = -K_d \pi \int_0^\infty dk k^{d-1} \left(u_{\mathbf{k}}^4 \delta(2E_{\mathbf{k}} - \omega) - v_{\mathbf{k}}^4 \delta(2E_{\mathbf{k}} + \omega) \right) \quad (4.5)$$

$$B_R(\omega) = K_d \mathcal{P} \int_0^\infty dk k^{d-1} \frac{\Delta_0^2}{4E_{\mathbf{k}}^2} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{k}} - \omega} + \frac{1}{2E_{\mathbf{k}} + \omega} \right) \quad (4.6)$$

$$B_I(\omega) = K_d \pi \int_0^\infty dk k^{d-1} \frac{\Delta_0^2}{4E_{\mathbf{k}}^2} \left(\delta(2E_{\mathbf{k}} - \omega) - \delta(2E_{\mathbf{k}} + \omega) \right) . \quad (4.7)$$

Notiamo che la parte reale di B è una funzione pari di ω , mentre la parte immaginaria di B è dispari. Riscriviamo inoltre le $A_R(\omega)$ e $A_I(\omega)$ come

$$A_R(\omega) = A_{Rp}(\omega) + A_{Rd}(\omega) \quad , \quad (4.8)$$

$$A_I(\omega) = A_{Ip}(\omega) + A_{Id}(\omega) \quad , \quad (4.9)$$

in cui

$$A_{R(I)p}(\omega) = \frac{1}{2} \left(A_{R(I)}(\omega) + A_{R(I)}(-\omega) \right) \quad , \quad (4.10)$$

$$A_{R(I)d}(\omega) = \frac{1}{2} \left(A_{R(I)}(\omega) - A_{R(I)}(-\omega) \right) \quad . \quad (4.11)$$

Otteniamo in questo modo che $D(\omega)$ con $\omega = \omega_r$ ha la parte reale data da

$$\begin{aligned} D_R(\omega) &= A_{Rp}(\omega)^2 - B_R(\omega)^2 - A_{Rd}(\omega)^2 \\ &\quad - A_{Id}(\omega)^2 + B_I(\omega)^2 + A_{Ip}(\omega)^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

e la parte immaginaria data da

$$D_I(\omega) = 2A_{Rp}(\omega)A_{Id}(\omega) - 2B_R(\omega)B_I(\omega) - 2A_{Rd}(\omega)A_{Ip}(\omega) \quad . \quad (4.13)$$

Ricordiamo dalla (3.9) che per $|\mathbf{q}| = 0$ l'inizio del taglio associato agli stati del continuo è dato da

$$\omega_0^* = \min_k 2E_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 2\Delta_0 & \text{se } \mu_0 \geq 0 \\ 2\sqrt{\mu_0^2 + \Delta_0^2} & \text{se } \mu_0 < 0 \end{cases} \quad . \quad (4.14)$$

La ricerca di quasirisonanze va fatta passando dal foglio fisico della superficie di Riemann al foglio non fisico, continuando analiticamente la funzione

di vertice per $\omega_i < 0$, attraverso il taglio ($\omega_r > \omega_0^*$). Siccome le funzioni $A(\omega)$ e $B(\omega)$ sono calcolate sull'asse reale, è necessario utilizzare qualche metodo di approssimazione per indagare il loro comportamento sul foglio non fisico. Un possibile metodo di approssimazione consiste nello sviluppare $D(\omega)$ in serie di ω lungo l'asse immaginario a partire da $\omega = \omega_r$ ($\omega_r > \omega_0^*$), ottenendo

$$D(\omega_r + i\omega_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega_i)^n}{n!} [D_R^{(n)}(\omega_r) + iD_I^{(n)}(\omega_r)] \quad . \quad (4.15)$$

Separando la parte reale da quella immaginaria e richiedendo che entrambe si annullino si perviene al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} D_R(\omega_r) - \omega_i D_I'(\omega_r) - \frac{1}{2}\omega_i^2 D_R''(\omega_r) + \frac{1}{6}\omega_i^3 D_I'''(\omega_r) + \dots = 0 \\ D_I(\omega_r) + \omega_i D_R'(\omega_r) - \frac{1}{2}\omega_i^2 D_I''(\omega_r) - \frac{1}{6}\omega_i^3 D_R'''(\omega_r) + \dots = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

le cui soluzioni permettono quindi di ottenere l'energia della quasirisonanza (parte reale di ω) e il tempo di vita medio della medesima (inverso della parte immaginaria di ω) a partire dalla conoscenza della funzione $D(\omega)$ sull'asse reale delle ω . Il sistema di equazioni (4.16) è *non lineare* e la sua soluzione numerica con metodi iterativi può risultare particolarmente complessa se la scelta iniziale della soluzione non è prossima alla soluzione vera. Nell'ipotesi che il tempo di vita medio della quasirisonanza sia sufficientemente "lungo" ($|\omega_i| \ll \omega_r$), la soluzione del sistema (4.16) può essere considerevolmente semplificata trascurando i termini superiori al primo ordine in ω_i . Occorre puntualizzare tuttavia che tale metodo di approssimazione non è applicabile nell'intorno dei punti ω_r in cui la funzione $D(\omega_r)$ o le sue derivate ammettano singolarità.

Analizziamo ora separatamente il caso bidimensionale, dove è possibile eseguire calcoli analitici, e il caso tridimensionale, dove è invece necessario ricorrere al calcolo numerico.

4.2 Caso bidimensionale

Nel caso di un sistema $2D$ è conveniente passare alle seguenti variabili adimensionali:

$$x \equiv \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} = \frac{\mathbf{k}^2}{2m\Delta_0} - x_0 \quad , \quad (4.17)$$

$$\omega_0 \equiv \frac{\omega}{2\Delta_0} \quad , \quad x_0 \equiv \frac{\mu_0}{\Delta_0} \quad , \quad (4.18)$$

$$E_x \equiv \frac{E_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} = \sqrt{x^2 + 1} \quad , \quad (4.19)$$

$$u_x^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{E_x} \right) \quad , \quad v_x^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{E_x} \right) \quad . \quad (4.20)$$

Le (4.4) – (4.7) allora diventano:

$$A_R(\omega_0) = \frac{m}{4\pi} \mathcal{P} \int_{-x_0}^{\infty} dx \left(\frac{1}{E_x} - \frac{u_x^4}{E_x - \omega_0} - \frac{v_x^4}{E_x + \omega_0} \right) \quad (4.21)$$

$$A_I(\omega_0) = -\frac{m}{4} \int_{-x_0}^{\infty} dx \left(u_x^4 \delta(E_x - \omega_0) - v_x^4 \delta(E_x + \omega_0) \right) \quad (4.22)$$

$$B_R(\omega_0) = \frac{m}{4\pi} \mathcal{P} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{4E_x^2} \left(\frac{1}{E_x - \omega_0} + \frac{1}{E_x + \omega_0} \right) \quad (4.23)$$

$$B_I(\omega_0) = \frac{m}{4} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{4E_x^2} \left(\delta(E_x - \omega_0) - \delta(E_x + \omega_0) \right) \quad . \quad (4.24)$$

Il calcolo delle parti immaginarie di A e di B è elementare. Il risultato è

$$B_I(\omega_0) = \frac{m}{8} \frac{1}{\omega_0 \sqrt{\omega_0^2 - 1}} \quad (4.25)$$

$$A_{Id}(\omega_0) = (1 - 2\omega_0^2) B_I(\omega_0) \quad (4.26)$$

$$A_{Ip}(\omega_0) = 0 \quad (4.27)$$

per $1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1}$ e $x_0 > 0$;

$$B_I(\omega_0) = \frac{m}{16} \frac{1}{\omega_0 \sqrt{\omega_0^2 - 1}} \quad (4.28)$$

$$A_{Id}(\omega_0) = (1 - 2\omega_0^2)B_I(\omega_0) \quad (4.29)$$

$$A_{Ip}(\omega_0) = -\frac{m}{8} \quad (4.30)$$

per $\omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}$.

Le (4.23) e (4.21) possono essere invece riscritte nella forma

$$B_R(\omega_0) = \frac{m}{8\pi} \mathcal{P} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{1}{x^2 + 1 - \omega_0^2} \quad (4.31)$$

$$A_{Rp}(\omega_0) = (1 - 2\omega_0^2)B_R(\omega_0) \quad (4.32)$$

$$A_{Rd}(\omega_0) = -\frac{m}{8\pi} \mathcal{P} \int_{-x_0}^{\infty} dx \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{2\omega_0}{x^2 + 1 - \omega_0^2} \quad (4.33)$$

Anche questi integrali sono elementari. I risultati per $\omega_0 > 1$ sono i seguenti:

$$B_R(\omega_0) = \frac{m}{8\pi} \frac{1}{2\omega_0\sqrt{\omega_0^2 - 1}} \left(\log \left| \frac{\omega_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 1}}{\omega_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1}} \right| + \log \left| \frac{x_0\omega_0 - \sqrt{x_0^2 + 1}\sqrt{\omega_0^2 - 1}}{x_0\omega_0 + \sqrt{x_0^2 + 1}\sqrt{\omega_0^2 - 1}} \right| \right) \quad (4.34)$$

$$A_{Rd}(\omega_0) = -\frac{m}{8\pi} \log \left| \frac{\omega_0 + \sqrt{x_0^2 + 1}}{\omega_0 - \sqrt{x_0^2 + 1}} \right| \quad (4.35)$$

A questo punto abbiamo a disposizione tutti gli elementi necessari per scrivere la parte reale e la parte immaginaria di $D(\omega_0)$. Se si vuole utilizzare una forma particolarmente compatta per $D(\omega_0)$ è conveniente introdurre le notazioni seguenti:

$$f(\omega_0) \equiv \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 - \omega_1}{1 + \omega_1} \frac{x_1 - \omega_1}{x_1 + \omega_1} \right| \quad (4.36)$$

$$g(\omega_0) \equiv \frac{1}{2} \log \left| \frac{\omega_0 + \sqrt{x_0^2 + 1}}{\omega_0 - \sqrt{x_0^2 + 1}} \right| \quad (4.37)$$

$$\omega_1 \equiv \frac{\sqrt{\omega_0^2 - 1}}{\omega_0} \quad , \quad x_1 \equiv \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \quad , \quad N_0 \equiv \frac{m}{2\pi} \quad . \quad (4.38)$$

Così facendo le (4.12) e (4.13) si scrivono:

$$D_R(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \begin{cases} f(\omega_0)^2 - g(\omega_0)^2 - \pi^2 & \text{se } 1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1} \\ & \text{e } x_0 \geq 0, \\ f(\omega_0)^2 - g(\omega_0)^2 & \text{se } \omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}, \end{cases} \quad (4.39)$$

$$D_I(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \begin{cases} 2\pi f(\omega_0) & \text{se } 1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1} \\ & \text{e } x_0 \geq 0, \\ \pi[f(\omega_0) - g(\omega_0)] & \text{se } \omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}. \end{cases} \quad (4.40)$$

Per le derivate otteniamo invece:

$$D'_R(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \left(2f(\omega_0)f'(\omega_0) - 2g(\omega_0)g'(\omega_0) \right) \quad (4.41)$$

$$D''_R(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \left(2f'(\omega_0)^2 + 2f(\omega_0)f''(\omega_0) \right. \\ \left. - 2g'(\omega_0)^2 - 2g(\omega_0)g''(\omega_0) \right) \quad (4.42)$$

$$D'_I(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \begin{cases} 2\pi f'(\omega_0) & \text{se } 1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1} \\ & \text{e } x_0 \geq 0, \\ \pi[f'(\omega_0) - g'(\omega_0)] & \text{se } \omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}, \end{cases} \quad (4.43)$$

$$D''_I(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \begin{cases} 2\pi f''(\omega_0) & \text{se } 1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1} \\ & \text{e } x_0 \geq 0, \\ \pi[f''(\omega_0) - g''(\omega_0)] & \text{se } \omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}, \end{cases} \quad (4.44)$$

in cui

$$f'(\omega_0) = -\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} \left(1 + \frac{x_0\sqrt{x_0^2 + 1}}{x_0^2 + 1 - \omega_0^2} \right) \quad (4.45)$$

$$f''(\omega_0) = \frac{\omega_0}{(\omega_0^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{x_0 \sqrt{x_0^2 + 1}}{x_0^2 + 1 - \omega_0^2} \right) - \frac{2\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 - 1}} \frac{x_0 \sqrt{x_0^2 + 1}}{(x_0^2 + 1 - \omega_0^2)^2} \quad (4.46)$$

$$g'(\omega_0) = \frac{\sqrt{x_0^2 + 1}}{x_0^2 + 1 - \omega_0^2} \quad (4.47)$$

$$g''(\omega_0) = 2\omega_0 \frac{\sqrt{x_0^2 + 1}}{(x_0^2 + 1 - \omega_0^2)^2} \quad (4.48)$$

Riscriviamo a questo punto la (4.16) al secondo ordine ω_i

$$\begin{cases} D_R - \omega_i D'_I - \frac{1}{2} \omega_i^2 D''_R = 0 \\ D_I + \omega_i D'_R - \frac{1}{2} \omega_i^2 D''_I = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

Notiamo che, assegnato un valore di ω_r , la prima equazione ammette al massimo due soluzioni $(\omega_{i1}, \omega_{i2})$, e la seconda equazione altre due soluzioni $(\omega_{i3}, \omega_{i4})$. Affinché il sistema abbia soluzione univoca deve essere soddisfatta almeno una delle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \omega_{i1} = \omega_{i3} \quad , \quad \omega_{i1} = \omega_{i4} \quad , \\ \omega_{i2} = \omega_{i3} \quad , \quad \omega_{i2} = \omega_{i4} \quad . \end{aligned}$$

Si è riscontrato che il sistema non ammette soluzioni accettabili. Infatti, le soluzioni che sono state trovate non soddisfano la condizione $|\omega_i| \ll |\omega_r|$; inoltre, tali soluzioni si trovano nell' intorno di $\omega_r = 2\sqrt{\mu_0^2 + \Delta_0^2}$ dove la funzione $D(\omega_r)$ e le sue derivate ammettono singolarità e pertanto lo sviluppo in serie di Taylor non è applicabile. Si è peraltro rilevato che, mentre la parte reale di D (approssimata dal membro a sinistra della prima equazione del sistema (4.49)) ammette zeri sul foglio non fisico della superficie di Riemann, la parte immaginaria di D (approssimata dal membro a sinistra della seconda equazione del sistema (4.49)) rimane costantemente negativa ed è generalmente decrescente lungo la curva degli zeri della $D(\omega_r + i\omega_i)$ con $\omega_i < 0$. Questo comportamento è valido in generale per ogni valore di $k_f \xi_{pair}$.

4.3 Caso tridimensionale

Nel caso tridimensionale risulta conveniente scegliere il seguente insieme di variabili adimensionali [si veda il paragrafo 2.3]:

$$x^2 \equiv \frac{\mathbf{k}^2}{2m\Delta_0} \quad , \quad x_0 = \frac{\mu_0}{\Delta_0} \quad , \quad \omega_0 = \frac{\omega}{2\Delta_0} \quad (4.50)$$

$$\xi_x = x^2 - x_0 \quad , \quad E_x = \sqrt{\xi_x^2 + 1} \quad (4.51)$$

$$u_x^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_x}{E_x} \right) \quad , \quad v_x^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_x}{E_x} \right) \quad . \quad (4.52)$$

Posto $N_0 = mk_f/(2\pi^2)$ si ottengono i seguenti risultati:

$$B_R(\omega_0) = \frac{N_0}{2} \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \mathcal{P} \int_0^\infty dx x^2 \frac{1}{E_x(E_x^2 - \omega_0^2)} \quad (4.53)$$

$$A_{Rp}(\omega_0) = (1 - 2\omega_0^2)B_R(\omega_0) \quad (4.54)$$

$$A_{Rd}(\omega_0) = -N_0 \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \omega_0 \mathcal{P} \int_0^\infty dx x^2 \frac{\xi_x}{E_x(E_x^2 - \omega_0^2)} \quad (4.55)$$

$$B_I(\omega_0) = \frac{\pi}{4} N_0 \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \int_0^\infty dx x^2 \frac{1}{E_x^2} \left(\delta(E_x - \omega_0) - \delta(E_x + \omega_0) \right) \quad (4.56)$$

$$A_{Id}(\omega_0) = (1 - 2\omega_0^2)B_I(\omega_0) \quad (4.57)$$

$$A_{Ip}(\omega_0) = -\frac{\pi}{4} N_0 \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \int_0^\infty dx x^2 \frac{2\xi_x}{E_x} \left(\delta(E_x - \omega_0) + \delta(E_x + \omega_0) \right) \quad . \quad (4.58)$$

Le parti immaginarie delle funzioni $A(\omega_0)$ e $B(\omega_0)$ possono essere calcolate analiticamente. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
B_I(\omega_0) &= \frac{\pi N_0}{8} \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \frac{1}{\omega_0 \sqrt{\omega_0^2 - 1}} \\
\times \begin{cases} \sqrt{x_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 1}} + \sqrt{x_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1}} & \text{se } 1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1} \text{ e } x_0 > 0, \\ \sqrt{x_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1}} & \text{se } \omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}, \end{cases} & (4.59)
\end{aligned}$$

$$A_{Id}(\omega_0) = (1 - 2\omega_0^2)B_I(\omega_0) \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned}
A_{Ip}(\omega_0) &= -\frac{\pi N_0}{4} \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \\
\times \begin{cases} -\sqrt{x_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 1}} + \sqrt{x_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1}} & \text{se } 1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1} \text{ e } x_0 > 0, \\ \sqrt{x_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1}} & \text{se } \omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}. \end{cases} & (4.61)
\end{aligned}$$

Posto

$$V_1 \equiv \mathcal{P} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{x^2 - x_2^2} \frac{1}{E_x} \quad (4.62)$$

$$V_2 \equiv \mathcal{P} \int_0^\infty dx \frac{x^2}{x^2 - x_1^2} \frac{1}{E_x} \quad (4.63)$$

in cui

$$x_1^2 \equiv x_0 + \sqrt{\omega_0^2 - 1} \quad (4.64)$$

$$x_2^2 \equiv x_0 - \sqrt{\omega_0^2 - 1} \quad , \quad (4.65)$$

le (4.53) – (4.55) possono essere riscritte nella forma

$$B_R(\omega_0) = \frac{N_0}{2} \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \frac{1}{2\sqrt{\omega_0^2 - 1}} (V_2 - V_1) \quad (4.66)$$

$$A_{Rp}(\omega_0) = \frac{N_0}{2} \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \frac{1 - 2\omega_0^2}{2\sqrt{\omega_0^2 - 1}} (V_2 - V_1) \quad (4.67)$$

$$A_{Rd}(\omega_0) = -\frac{N_0}{2} \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} \omega_0 (V_2 + V_1) \quad . \quad (4.68)$$

Utilizzando le espressioni appena ricavate per $A(\omega_0)$ e $B(\omega_0)$, si può mostrare con semplici passaggi algebrici che la parte reale e la parte immaginaria di $D(\omega_0)$ si scrivono rispettivamente nella forma compatta

$$D_R(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \frac{\Delta_0}{\epsilon_f} \left\{ \begin{array}{l} f_1(\omega_0)f_2(\omega_0) - \pi^2 x_1 x_2 \\ \quad \quad \quad \text{se } 1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1} \text{ e } x_0 > 0, \\ f_1(\omega_0)f_2(\omega_0) \\ \quad \quad \quad \text{se } \omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}, \end{array} \right. \quad (4.69)$$

$$D_I(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \frac{\Delta_0}{\epsilon_f} \left\{ \begin{array}{l} \pi x_1 f_1(\omega_0) + \pi x_2 f_2(\omega_0) \\ \quad \quad \quad \text{se } 1 < \omega_0 < \sqrt{x_0^2 + 1} \text{ e } x_0 > 0, \\ \pi x_1 f_1(\omega_0) \\ \quad \quad \quad \text{se } \omega_0 > \sqrt{x_0^2 + 1}. \end{array} \right. \quad (4.70)$$

In queste espressioni le funzioni f_1 e f_2 sono definite da

$$f_1(\omega_0) \equiv -2\omega_0 V_1 \quad , \quad (4.71)$$

$$f_2(\omega_0) \equiv 2\omega_0 V_2 \quad . \quad (4.72)$$

In generale gli integrali V_1 e V_2 devono essere valutati con l'ausilio del calcolo numerico.

Nel limite Bose-Einstein è comunque possibile approssimare le funzioni integrande in V_1 e V_2 e quindi ottenere risultati analitici. Utilizzando l'approssimazione $E_x \approx \xi_x$ valida se $x_0 < 0$ e $|x_0| \gg 1$, si ottiene

$$f_1(\omega_0) \approx \pi \left(\sqrt{|x_0|} - \sqrt{|x_0| + \omega_0} \right) \quad , \quad (4.73)$$

$$f_2(\omega_0) \approx \pi \sqrt{|x_0|} \quad . \quad (4.74)$$

Dalle (4.73) e (4.74) e dalla (2.130) si ricava quindi

$$D_R(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \frac{2\sqrt[4]{8}}{\sqrt{3\pi}} \frac{1}{\sqrt{k_f \xi_{pair}}} \pi^2 \sqrt{|x_0|} \left(\sqrt{|x_0|} - \sqrt{|x_0| + \omega_0} \right) \quad (4.75)$$

$$D_I(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \frac{2\sqrt[4]{8}}{\sqrt{3\pi}} \frac{1}{\sqrt{k_f \xi_{pair}}} \pi^2 \sqrt{\omega_0 - |x_0|} \left(\sqrt{|x_0|} - \sqrt{|x_0| + \omega_0} \right) \quad (4.76)$$

valide per $\omega_0 > |x_0|$, le cui derivate sono date da

$$D'_R(\omega_0) = -\frac{N_0^2}{4} \frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt{3\pi}} \frac{1}{\sqrt{k_f \xi_{pair}}} \pi^2 \sqrt{|x_0|} \frac{1}{\sqrt{|x_0| + \omega_0}} \quad (4.77)$$

$$D'_I(\omega_0) = \frac{N_0^2}{4} \frac{2\sqrt[4]{8}}{\sqrt{3\pi}} \frac{1}{\sqrt{k_f \xi_{pair}}} \frac{\pi^2}{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_0 - |x_0|}} \left(\sqrt{|x_0|} - \sqrt{|x_0| + \omega_0} \right) - \frac{\sqrt{\omega_0 - |x_0|}}{\sqrt{\omega_0 + |x_0|}} \right) \quad . \quad (4.78)$$

Inserendo le (4.75) – (4.78) nel sistema linearizzato

$$\begin{cases} D_R(\omega_0) - \omega_i D'_I(\omega_0) = 0 \\ D_I(\omega_0) + \omega_i D'_R(\omega_0) = 0 \end{cases} \quad (4.79)$$

si trova che esso non ammette soluzioni.

Per accoppiamento debole e intermedio si è utilizzato il calcolo numerico per valutare la funzione $D(\omega_0)$ sull'asse reale delle ω_0 . Anche in questo caso si è trovato che il sistema (4.79) non ammette soluzioni.

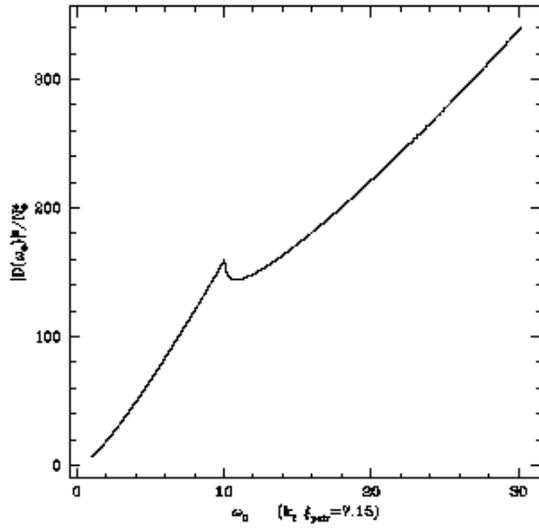


Figura 4.1: $|D(\omega)|^2$ in funzione di ω per $k_f \xi_{pair} = 7.15$

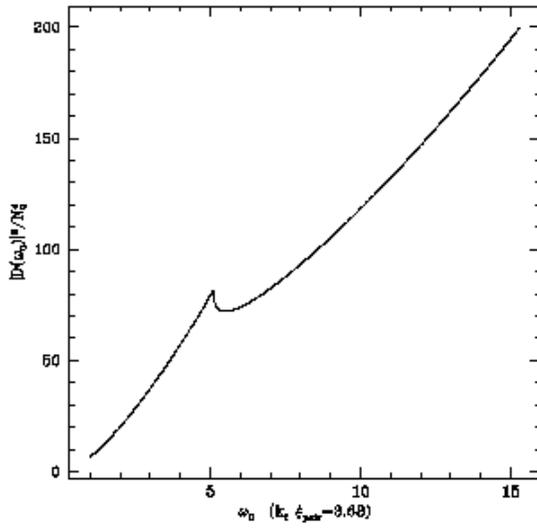


Figura 4.2: $|D(\omega)|^2$ in funzione di ω per $k_f \xi_{pair} = 3.68$

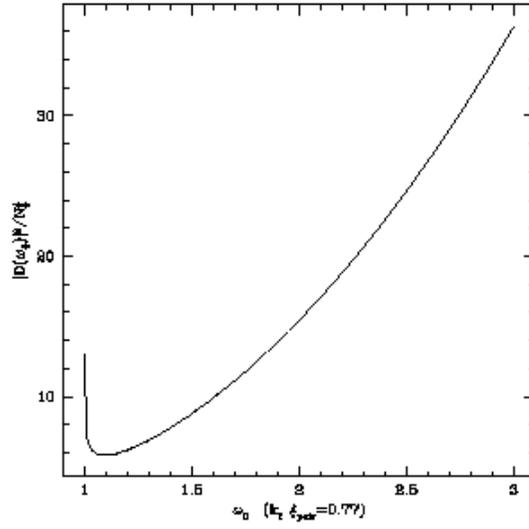


Figura 4.3: $|D(\omega)|^2$ in funzione di ω per $k_f \xi_{pair} = 0.77$

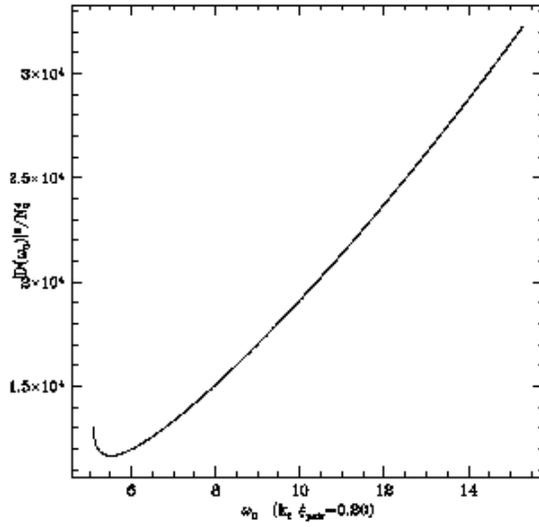


Figura 4.4: $|D(\omega)|^2$ in funzione di ω per $k_f \xi_{pair} = 0.20$

Ciononostante, vale la pena di sottolineare il comportamento di $|D(\omega_0)|^2$ in funzione della frequenza reale al variare del parametro adimensionale $k_f \xi_{pair}$. Esso mostra per $k_f \xi_{pair} \approx 1$ un minimo piuttosto pronunciato per un valore di ω_r poco sopra $2\Delta_0$. Tale minimo diventa sempre meno evidente e si allontana da $2\Delta_0$ nel limite BCS ($k_f \xi_{pair} \gg 1$), mentre nel limite di Bose-Einstein ($k_f \xi_{pair} \ll 1$) esso addirittura scompare.

Come si vedrà in dettaglio nel capitolo successivo, il contributo delle fluttuazioni oltre il campo medio nello studio delle grandezze fisiche dà origine ad espressioni che coinvolgono $|D(\omega_0)|^2$. Su basi generali si può ritenere che, all'aumentare dell'intensità dell'interazione tra particelle, diventino sempre più importanti le correzioni dovute alle fluttuazioni. Un'analisi quantitativa del loro contributo è un compito di calcolo numerico estremamente impegnativo ed esula dagli scopi del presente lavoro.

È però ragionevole supporre che un comportamento così peculiare di $|D(\omega_0)|^2$ nella regione di accoppiamento intermedio possa influenzare qualche grandezza fisica o modificare, per esempio, la densità degli stati di singola particella lasciando così una traccia inconfondibile per riconoscere il “tipo” di superconduttività nei nuovi materiali ad alta temperatura critica.

Capitolo 5

Studio di alcune grandezze fisiche con l'inclusione delle fluttuazioni oltre l'approssimazione di campo medio

È noto dagli esperimenti che i superconduttori convenzionali sono caratterizzati da una lunghezza di coerenza dell'ordine di 500-10000 Å. Ciò implica che il raggio di una coppia sia molto più grande della distanza tra coppie. Questo regime con coppie di Cooper largamente sovrapposte può essere accuratamente descritto da una teoria di campo medio come quella elaborata nel 1957 da Bardeen, Cooper e Schrieffer.

Studi teorici approfonditi sono stati condotti anche nel contesto di un sistema di fermioni con interazione fortemente attrattiva. In questo caso si formano bosoni composti formati da coppie di fermioni con separazione spaziale molto piccola rispetto alla distanza tra coppie e il sistema può essere considerato come un insieme di bosoni debolmente interagenti. La transizione alla fase di superconduzione è allora interpretata tramite il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein dei bosoni composti.

I nuovi materiali ad alta temperatura critica, caratterizzati da una lunghezza di coerenza dell'ordine di pochi Å, non sembrano comunque appartenere né all'uno (BCS) né all'altro (BE) dei regimi sopra considerati, ma

piuttosto ad un regime intermedio tra i due. In questo regime intermedio la fisica del problema risulta piuttosto complessa. Infatti, i fermioni non sono sufficientemente legati da formare bosoni composti stabili, né sono così debolmente interagenti da essere accuratamente descritti dalla teoria BCS. In questo regime ci sono quindi meccanismi di interazione molto complicati tra bosoni composti e fermioni liberi e una teoria di campo medio risulta chiaramente insoddisfacente. È allora necessario tenere in conto il contributo delle fluttuazioni oltre l'approssimazione di campo medio.

Lo scopo di questo capitolo è quello di porre le basi per un sistematico e approfondito studio del contributo delle fluttuazioni nelle grandezze fisiche e in particolare nella densità degli stati di particella singola, nella speranza di trovare risultati che siano caratteristici *soltanto* di questo particolare regime. Un tale obiettivo comporta inevitabilmente un gravoso e complicato utilizzo di metodi di calcolo numerico che non sarà affrontato in questa sede. Piuttosto si mostrerà come sia possibile, una volta scritte le equazioni (valide in generale) per le grandezze fisiche, ottenere risultati analitici nel limite Bose-Einstein, dove i calcoli risultano particolarmente semplificati.

5.1 Rappresentazione spettrale della funzione di vertice

Definendo

$$G_{Bn}(q) = -\frac{A(-q)}{D(q)} \quad , \quad (5.1)$$

$$G_{Ba}(q) = \frac{B(q)}{D(q)} \quad , \quad (5.2)$$

con $A(q)$ data dalla (3.3), $B(q)$ dalla (3.4) e $D(q)$ dalla (3.2), la funzione di vertice (3.1) si scrive

$$\Gamma(q) = - \begin{pmatrix} G_{Bn}(q) & G_{Ba}(q) \\ G_{Ba}(q) & -G_{Bn}(-q) \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

La dipendenza dalle frequenze di Matsubara bosoniche ω_ν nelle (5.1) e (5.2) è piuttosto complessa e non riconducibile a frazioni semplici. Pertanto, se si vuole calcolare la somma sulle frequenze ω_ν nelle (2.52) e (2.53) è necessario utilizzare le rappresentazioni spettrali per le (5.1) e (5.2), ovvero scrivere

$$G_{Bn}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{G_{BnI}^R(\mathbf{q}, \omega')}{\omega' - i\omega_\nu} \quad (5.4)$$

$$G_{Ba}(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \frac{G_{BaI}^R(\mathbf{q}, \omega')}{\omega' - i\omega_\nu} \quad (5.5)$$

dove

$$G_{Bn(a)I}^R(\mathbf{q}, \omega) = \Im G_{Bn(a)}^R(\mathbf{q}, \omega) \quad (5.6)$$

e

$$G_{Bn(a)}^R(\mathbf{q}, \omega) = G_{Bn(a)}(\mathbf{q}, i\omega_\nu \rightarrow \omega + i\eta) \quad . \quad (5.7)$$

Nel limite di temperatura zero il peso spettrale per la parte di vertice può essere scritto esplicitamente come:

$$\begin{aligned}
G_{BnI}^R(\mathbf{q}, \omega) &= -\pi R_{b1}(q) \delta(\omega - \omega_b(q)) \\
&\quad -\pi R_{b2}(q) \delta(\omega + \omega_b(q)) \\
&+ \left(\frac{A_{Rp}(\mathbf{q}, \omega) D_I(\mathbf{q}, \omega) - A_{Id}(\mathbf{q}, \omega) D_R(\mathbf{q}, \omega)}{D_R(\mathbf{q}, \omega)^2 + D_I(\mathbf{q}, \omega)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{A_{Ip}(\mathbf{q}, \omega) D_R(\mathbf{q}, \omega) - A_{Rd}(\mathbf{q}, \omega) D_I(\mathbf{q}, \omega)}{D_R(\mathbf{q}, \omega)^2 + D_I(\mathbf{q}, \omega)^2} \right) \\
&\quad \times \left(\theta(\omega - \omega_q^*) + \theta(-\omega - \omega_q^*) \right) \tag{5.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{BaI}^R(\mathbf{q}, \omega) &= -\pi R_b(q) \left(\delta(\omega - \omega_b(q)) - \delta(\omega + \omega_b(q)) \right) \\
&+ \left(\frac{B_I(\mathbf{q}, \omega) D_R(\mathbf{q}, \omega) - B_R(\mathbf{q}, \omega) D_I(\mathbf{q}, \omega)}{D_R(\mathbf{q}, \omega)^2 + D_I(\mathbf{q}, \omega)^2} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\theta(\omega - \omega_q^*) + \theta(-\omega - \omega_q^*) \right) \right) . \tag{5.9}
\end{aligned}$$

I termini che contengono funzioni δ di Dirac nelle (5.8) e (5.9) sono associati al polo dello stato legato (modo collettivo) in $G_{Bn}^R(\mathbf{q}, \omega)$ e in $G_{Ba}^R(\mathbf{q}, \omega)$, con residui

$$R_{b1}^{-1}(q) = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{D_R(\mathbf{q}, \omega)}{A_{Rd}(\mathbf{q}, \omega) - A_{Rp}(\mathbf{q}, \omega)} \Big|_{\omega=\omega_b(q)} \tag{5.10}$$

$$R_{b2}^{-1}(q) = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{D_R(\mathbf{q}, \omega)}{A_{Rd}(\mathbf{q}, \omega) - A_{Rp}(\mathbf{q}, \omega)} \Big|_{\omega=-\omega_b(q)} \tag{5.11}$$

$$R_b^{-1}(q) = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{D_R(\mathbf{q}, \omega)}{B_R(\mathbf{q}, \omega)} \Big|_{\omega=\omega_b(q)} . \tag{5.12}$$

Gli altri termini nelle (5.8) e (5.9) provengono dal continuo degli stati a due particelle sopra il fondo della banda ω_q^* (dato dalla (3.9)), con

$$A_{Rp}(\mathbf{q}, \omega) = \beta \Omega \mathcal{P} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} - \frac{(u_+^2 u_-^2 + v_+^2 v_-^2)(E_+ + E_-)}{(E_+ + E_-)^2 - \omega^2} \right) \tag{5.13}$$

$$A_{Rd}(\mathbf{q}, \omega) = -\beta\Omega \mathcal{P} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{(u_+^2 u_-^2 - v_+^2 v_-^2) \omega}{(E_+ + E_-)^2 - \omega^2} \quad (5.14)$$

$$A_{Id}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{\pi}{2} \beta\Omega \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (u_+^2 u_-^2 + v_+^2 v_-^2) \times \left(\delta(E_+ + E_- - \omega) - \delta(E_+ + E_- + \omega) \right) \quad (5.15)$$

$$A_{Ip}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{\pi}{2} \beta\Omega \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} (u_+^2 u_-^2 - v_+^2 v_-^2) \times \left(\delta(E_+ + E_- - \omega) + \delta(E_+ + E_- + \omega) \right) \quad (5.16)$$

$$B_R(\mathbf{q}, \omega) = \beta\Omega \mathcal{P} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} u_+ u_- v_+ v_- \times \left(\frac{1}{E_+ + E_- - \omega} + \frac{1}{E_+ + E_- + \omega} \right) \quad (5.17)$$

$$B_I(\mathbf{q}, \omega) = \pi\beta\Omega \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} u_+ u_- v_+ v_- \times \left(\delta(E_+ + E_- - \omega) - \delta(E_+ + E_- + \omega) \right) \quad (5.18)$$

$$D_R(\mathbf{q}, \omega) = A_{Rp}(\mathbf{q}, \omega)^2 - B_R(\mathbf{q}, \omega)^2 - A_{Rd}(\mathbf{q}, \omega)^2 - A_{Id}(\mathbf{q}, \omega)^2 + B_I(\mathbf{q}, \omega)^2 + A_{Ip}(\mathbf{q}, \omega)^2 \quad (5.19)$$

$$D_I(\mathbf{q}, \omega) = 2A_{Rp}(\mathbf{q}, \omega)A_{Id}(\mathbf{q}, \omega) - 2B_R(\mathbf{q}, \omega)B_I(\mathbf{q}, \omega) - 2A_{Rd}(\mathbf{q}, \omega)A_{Ip}(\mathbf{q}, \omega) \quad (5.20)$$

5.2 Self-energia

La self-energia approssimata a un “loop” è data dalle (2.51) – (2.53). Con le notazioni introdotte in questo capitolo essa può essere riscritta come

$$\Sigma_{11}(k) = -\Sigma_{22}(-k) = \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\omega_\nu} \mathcal{G}_0(q-k) G_{Bn}(q) \quad (5.21)$$

$$\Sigma_{12}(k) = \Sigma_{21}(k) = - \sum_{\mathbf{q}} \sum_{\omega_\nu} \mathcal{F}_0(q-k) G_{Ba}(q) - \Delta_1 \quad (5.22)$$

Per calcolare la somma sulle frequenze di Matsubara bosoniche ω_ν è sufficiente decomporre in frazioni semplici e utilizzare il risultato [5]

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sum_{\omega_\nu} \frac{e^{i\omega_\nu \eta}}{i\omega_\nu - x} = -\beta b(x) \quad (5.23)$$

in cui

$$b(x) = \frac{1}{e^{\beta x} - 1} \quad (5.24)$$

è la funzione di distribuzione di Bose. Utilizzando le (5.4) e (5.5), le (5.21) e (5.22) diventano pertanto:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(k) &= -\beta \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BnI}^R(\mathbf{q}, \omega') \\ &\times \left(u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{i\omega_s + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} + v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{i\omega_s - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{12}(k) &= -\Delta_1 - \beta \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BaI}^R(\mathbf{q}, \omega') \\ &\times u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \left(\frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{i\omega_s + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} - \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{i\omega_s - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Nel limite di temperatura zero, inserendo le (5.8) e (5.9) nelle (5.25) e (5.26) e ricordando che in questo limite

$$f(x) = \theta(-x) \quad (5.27)$$

e

$$b(x) = -\theta(-x) \quad , \quad (5.28)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}(k) = & \beta \sum_{\mathbf{q}} \left(v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{R_{b1}(q)}{i\omega_s - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \right. \\ & \left. - u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{R_{b2}(q)}{i\omega_s + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \right) \\ & - \beta \sum_{\mathbf{q}} \int_{\omega_q^*}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \left\{ \left(\frac{A_{Ip}(\mathbf{q}, \omega) D_R(\mathbf{q}, \omega) - A_{Rd}(\mathbf{q}, \omega) D_I(\mathbf{q}, \omega)}{D_R(\mathbf{q}, \omega)^2 + D_I(\mathbf{q}, \omega)^2} \right. \right. \\ & + \left. \frac{A_{Rp}(\mathbf{q}, \omega) D_I(\mathbf{q}, \omega) - A_{Id}(\mathbf{q}, \omega) D_R(\mathbf{q}, \omega)}{D_R(\mathbf{q}, \omega)^2 + D_I(\mathbf{q}, \omega)^2} \right) \frac{v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{i\omega_s - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \\ & - \left(\frac{A_{Ip}(\mathbf{q}, \omega) D_R(\mathbf{q}, \omega) - A_{Rd}(\mathbf{q}, \omega) D_I(\mathbf{q}, \omega)}{D_R(\mathbf{q}, \omega)^2 + D_I(\mathbf{q}, \omega)^2} \right. \\ & \left. \left. - \frac{A_{Rp}(\mathbf{q}, \omega) D_I(\mathbf{q}, \omega) - A_{Id}(\mathbf{q}, \omega) D_R(\mathbf{q}, \omega)}{D_R(\mathbf{q}, \omega)^2 + D_I(\mathbf{q}, \omega)^2} \right) \frac{u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{i\omega_s + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \right\} \quad , \quad (5.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{12}(k) = & -\Delta_1 - \beta \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} R_b(q) \\ & \times \left(\frac{1}{i\omega_s - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} - \frac{1}{i\omega_s + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \right) \\ & + \beta \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \int_{\omega_q^*}^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \left(\frac{B_I(\mathbf{q}, \omega) D_R(\mathbf{q}, \omega) - B_R(\mathbf{q}, \omega) D_I(\mathbf{q}, \omega)}{D_R(\mathbf{q}, \omega)^2 + D_I(\mathbf{q}, \omega)^2} \right) \\ & \times \left(\frac{1}{i\omega_s - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} - \frac{1}{i\omega_s + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \right) \quad . \quad (5.30) \end{aligned}$$

5.3 Spostamento del potenziale chimico

Quando si calcolano grandezze fisiche all'ordine λ è necessario tener conto sia dello spostamento Δ_1 del parametro d'ordine

$$\Delta = \Delta_0 + \lambda \Delta_1 + O(\lambda^2) \quad , \quad (5.31)$$

che dello spostamento μ_1 del potenziale chimico

$$\mu = \mu_0 + \lambda\mu_1 + O(\lambda^2) \quad . \quad (5.32)$$

Lo spostamento Δ_1 è già presente esplicitamente nella (2.53) ed è dato dalla (2.58). Il potenziale chimico μ_1 nelle (2.54), (2.56) e (2.60) deve essere invece scelto in modo da mantenere una densità costante di particelle. Determiniamo allora μ_1 in modo da soddisfare tale condizione. Approssimando la (2.31) con

$$\frac{S_{eff}}{\lambda} \approx \frac{1}{\lambda} S_{eff}^{(0)} + S_{eff}^{(2)}$$

e integrando la (2.25) sulle variabili di Hubbard-Stratonovich b e b^* si ottiene

$$Z = e^{-\frac{1}{\lambda}\beta\Omega_{gc}} \quad (5.33)$$

dove

$$\Omega_{gc} = \Omega_{gc}^{(0)} + \lambda\Omega_{gc}^{(1)} \quad , \quad (5.34)$$

$$\Omega_{gc}^{(0)} = -\frac{\Delta_0^2}{V} - \frac{2}{\beta} \sum_{\mathbf{k}} \log \left(1 + e^{-\beta E_{\mathbf{k}}} \right) + \sum_{\mathbf{k}} (\xi_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}}) \quad , \quad (5.35)$$

$$\Omega_{gc}^{(1)} = \frac{1}{2\beta} \sum_q \log D(q) \quad . \quad (5.36)$$

Il parametro d'ordine Δ è determinato dalla condizione

$$\frac{\partial\Omega_{gc}}{\partial\Delta} = 0 \quad , \quad (5.37)$$

mentre il potenziale chimico può essere ottenuto per mezzo della relazione

$$n_f = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial\Omega_{gc}}{\partial\mu} \quad . \quad (5.38)$$

Sviluppando in serie di potenze di λ intorno ai valori di campo medio μ_0 e Δ_0 , le (5.37) e (5.38) diventano:

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{\partial \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \Delta}(\mu_0, \Delta_0) + \lambda \left(\frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \Delta^2}(\mu_0, \Delta_0) \Delta_1 \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \mu \partial \Delta}(\mu_0, \Delta_0) \mu_1 + \frac{\partial \Omega_{gc}^{(1)}}{\partial \Delta}(\mu_0, \Delta_0) \right) \quad (5.39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\Omega n_f = & \frac{\partial \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \mu}(\mu_0, \Delta_0) + \lambda \left(\frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \Delta \partial \mu}(\mu_0, \Delta_0) \Delta_1 \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \mu^2}(\mu_0, \Delta_0) \mu_1 + \frac{\partial \Omega_{gc}^{(1)}}{\partial \mu}(\mu_0, \Delta_0) \right) \quad . \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Utilizzando il fatto che in approssimazione di campo medio risulta

$$\frac{\partial \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \Delta}(\mu_0, \Delta_0) = 0 \quad , \quad (5.41)$$

$$n_f = -\frac{1}{\Omega} \frac{\partial \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \mu}(\mu_0, \Delta_0) \quad , \quad (5.42)$$

le (5.39) e (5.40) si possono finalmente scrivere nella forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \Delta^2}(\mu_0, \Delta_0) & \frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \mu \partial \Delta}(\mu_0, \Delta_0) \\ \frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \Delta \partial \mu}(\mu_0, \Delta_0) & \frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \mu^2}(\mu_0, \Delta_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \Omega_{gc}^{(1)}}{\partial \Delta}(\mu_0, \Delta_0) \\ -\frac{\partial \Omega_{gc}^{(1)}}{\partial \mu}(\mu_0, \Delta_0) \end{pmatrix} \quad (5.43)$$

da cui si possono ricavare sia lo spostamento del parametro d'ordine Δ_1 che quello del potenziale chimico μ_1 , una volta note le derivate rispetto a Δ e/o μ dell'energia libera gran canonica Ω_{gc} . Nel limite di temperatura zero dalla (5.35) si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \Delta^2}(\mu_0, \Delta_0) = -\frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \mu^2}(\mu_0, \Delta_0) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^2}{E_{\mathbf{k}}^3} \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \mu \partial \Delta}(\mu_0, \Delta_0) = \frac{\partial^2 \Omega_{gc}^{(0)}}{\partial \Delta \partial \mu}(\mu_0, \Delta_0) = -\sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0 \xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}^3} \quad . \quad (5.45)$$

Utilizzando la (5.36) si può mostrare che

$$-\frac{\partial \Omega_{gc}^{(1)}}{\partial \Delta}(\mu_0, \Delta_0) = \frac{2}{\beta} h \quad (5.46)$$

con h dato dalla (2.59), che riscriviamo nella forma

$$h = \sum_k \left\{ [\mathcal{G}_0(k)\mathcal{G}_0(-k) - \mathcal{F}_0(k)\mathcal{F}_0(k)] \right. \\ \left. \times \sum_q \mathcal{F}_0(q-k)G_{Ba}(q) \right. \\ \left. + 2\mathcal{F}_0(k)\mathcal{G}_0(k) \sum_q \mathcal{G}_0(q-k)G_{Bn}(q) \right\} . \quad (5.47)$$

Analogamente

$$-\frac{\partial \Omega_{gc}^{(1)}}{\partial \mu}(\mu_0, \Delta_0) = \Omega n_f^{(1)} \quad (5.48)$$

con $n_f^{(1)}$ dato da

$$n_f^{(1)} = \frac{2}{\beta \Omega} \sum_k \left\{ [\mathcal{G}_0(k)\mathcal{G}_0(k) - \mathcal{F}_0(k)\mathcal{F}_0(k)] \right. \\ \left. \times \sum_q \mathcal{G}_0(q-k)G_{Bn}(q) \right. \\ \left. - 2\mathcal{F}_0(k)\mathcal{G}_0(k) \sum_q \mathcal{F}_0(q-k)G_{Ba}(q) \right\} . \quad (5.49)$$

Dalle (5.44) e (5.45) si ha

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^2}{E_{\mathbf{k}}^3} = 2N_0 \Omega \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} J_5(x_0) \quad (5.50)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0 \xi_{\mathbf{k}}}{E_{\mathbf{k}}^3} = 2N_0 \Omega \sqrt{\frac{\Delta_0}{\epsilon_f}} J_6(x_0) \quad (5.51)$$

nelle quali ricordiamo che Ω é il volume del sistema, $N_0 = mk_f/(2\pi^2)$ è la densità degli stati in $3D$ per proiezione di spin sulla superficie di Fermi nello stato normale, Δ_0/ϵ_f é data dalla (2.96), e $J_5(x_0)$ e $J_6(x_0)$ sono rispettivamente dati dalle (2.89) e (2.90). Utilizzando le (5.50) e (5.51) e la (2.96), la soluzione del sistema (5.43) è data da

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N_0} \frac{\sqrt[3]{x_0 J_5 + J_6}}{J_5^2 + J_6^2} \begin{pmatrix} J_5 & -J_6 \\ -J_6 & -J_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{\beta\Omega} \\ \frac{n_f^{(1)}}{2} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

la quale, ricordando la (3.131) può essere riscritta nella forma

$$\begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} = \frac{3}{N_0} \frac{s^2}{c_f^2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{J_6}{J_5} \\ -\frac{J_6}{J_5} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{\beta\Omega} \\ \frac{n_f^{(1)}}{2} \end{pmatrix} . \quad (5.53)$$

A questo punto, per procedere ulteriormente, è necessario calcolare le (5.47) e (5.49).

5.4 Calcolo di h e $n_f^{(1)}$

Al membro di destra delle (5.47) e (5.49) si hanno tipiche espressioni che intervengono quando si considera l'approssimazione a un "loop". Esse coinvolgono una somma sulle frequenze di Matsubara bosoniche e fermioniche e un'integrazione sui vettori d'onda \mathbf{k} e \mathbf{q} . Inoltre le $G_{Bn}(q)$ e $G_{Ba}(q)$, date rispettivamente dalle (5.1) e (5.2), non sono funzioni note analiticamente. Pertanto non ci si deve sorprendere piú di tanto se questo argomento non è stato sufficientemente ed esaurientemente trattato in letteratura. Cerchiamo ora di calcolare per quanto possibile le (5.47) e (5.49).

5.4.1 Somma sulle frequenze di Matsubara

Ricordando le (5.21) – (5.26), riducendo sistematicamente in frazioni semplici e utilizzando la (2.66), la (5.47) si può scrivere nella forma

$$h = \beta^2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BaI}^R(\mathbf{q}, \omega') u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \\ \times \left\{ -\frac{(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \\
& - \frac{(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \\
& + \frac{(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \\
& \quad - 2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} f(E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right] \\
& \quad + 2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} f(E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right] \\
& \quad + 2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} (1 - f(E_{\mathbf{k}})) \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right] \\
& \quad - 2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} (1 - f(E_{\mathbf{k}})) \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right] \Big\} \\
& \quad - \beta^2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BnI}^R(\mathbf{q}, \omega') 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \\
& \quad \times \left\{ -\frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right. \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \\
& \quad \left. + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right. \\
& \quad \quad \left. - u_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} f(E_{\mathbf{k}}) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right] \\
& -u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} f(E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \left. -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right] \\
& -v_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} (1 - f(E_{\mathbf{k}})) \right. \\
& \left. +\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right] \\
& -v_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} (1 - f(E_{\mathbf{k}})) \right. \\
& \left. +\frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(1 - f(E_{\mathbf{k}}) - f(\omega' + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right) \right] \Big\} . \quad (5.54)
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

La (5.54) è valida per $0 \leq T < T_c$. In particolare, nel limite di temperatura zero si possono utilizzare le (5.27) e (5.28) e ottenere pertanto

$$\begin{aligned}
h &= -\beta^2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BaI}^R(\mathbf{q}, \omega') u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \\
& \times \left\{ \frac{(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{\theta(-\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} - \frac{(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{\theta(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \right. \\
& \left. - 2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \frac{\theta(-\omega')}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega')^2} + 2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \frac{\theta(\omega')}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega')^2} \right\} \\
& -\beta^2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BnI}^R(\mathbf{q}, \omega') 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \\
& \times \left\{ \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{\theta(-\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{\theta(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \right. \\
& \left. + u_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{\theta(-\omega')}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega')^2} - v_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{\theta(\omega')}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega')^2} \right\} \quad (5.55)
\end{aligned}$$

Con una procedura analoga, la (5.49) può essere riscritta nel limite di temperatura zero

$$n_f^{(1)} = -2 \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BaI}^R(\mathbf{q}, \omega') 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{\theta(-\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} - \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{\theta(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \right. \\
& \quad \left. + u_{\mathbf{k}}^2 \frac{\theta(-\omega')}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega')^2} + v_{\mathbf{k}}^2 \frac{\theta(\omega')}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega')^2} \right\} \\
& \quad - 2 \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BnI}^R(\mathbf{q}, \omega') \\
& \times \left\{ \frac{2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{\theta(-\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} + \frac{2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{\theta(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \right. \\
& \quad - u_{\mathbf{k}}^2 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \frac{\theta(-\omega')}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega')^2} \\
& \quad \left. + v_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \frac{\theta(\omega')}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega')^2} \right\} . \quad (5.56)
\end{aligned}$$

5.4.2 Contributo dello stato legato e del continuo

È utile scrivere le (5.55) e (5.56) rispettivamente nella forma

$$h = h_b + h_c \quad , \quad (5.57)$$

$$n_f^{(1)} = n_{fb}^{(1)} + n_{fc}^{(1)} \quad . \quad (5.58)$$

I termini h_b e $n_{fb}^{(1)}$ nelle (5.57) e (5.58) sono ottenuti sostituendo le (5.8) e (5.9) nelle (5.55) e (5.56) dove si considerino solo i termini che contengono le funzioni δ di Dirac. Si ha esplicitamente

$$\begin{aligned}
h_b = & \beta^2 \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ R_{b1}(q) 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \left[\frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - v_{\mathbf{k}}^2 \frac{v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q))^2} \right] + R_{b2}(q) 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} \right. \\
& \times \left[\frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} + u_{\mathbf{k}}^2 \frac{u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q))^2} \right] \\
& \quad \left. + R_b(q) u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \left[- \frac{(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2)^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 4u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2 \frac{1}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q))^2} \right] \right\} \quad (5.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_{fb}^{(1)} = & 2 \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ R_{b1}(q) \left[\frac{2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \right. \right. \\
& \left. \left. + v_{\mathbf{k}}^2 (u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) \frac{v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q))^2} \right] + R_{b2}(q) \right. \\
\times & \left[\frac{2u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} - u_{\mathbf{k}}^2 \frac{(u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2) u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q))^2} \right] \\
& \left. + R_b(q) 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \left[-\frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{(E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q))^2} \right] \right\} . \quad (5.60)
\end{aligned}$$

I termini h_c e $n_{fc}^{(1)}$ sono invece ricavati dai termini restanti che descrivono gli stati del continuo nelle (5.8) e (5.9).

5.5 Calcolo dei residui

I residui R_{b1} , R_{b2} e R_b dati dalle (5.10), (5.11) e (5.12) possono essere calcolati analiticamente nel limite di q “piccoli” ($q^2/(2m\omega_0^*) \ll 1$) per tutti i valori della variabile adimensionale $k_f \xi_{pair}$. Inserendo le (3.12) e (3.13) approssimate al secondo ordine in $|\mathbf{q}|$ e ω nelle (5.10) – (5.12) e utilizzando poi le (3.93) – (3.131) si ottiene:

$$R_{b1}(q) = C_B \left\{ \frac{2L_4}{\Delta_0} + \frac{4L_1 + (L_2 + L_6 \frac{2ms^2}{\Delta_0}) \frac{q^2}{2m\Delta_0}}{2sq} \right\} \quad (5.61)$$

$$R_{b2}(q) = C_B \left\{ \frac{2L_4}{\Delta_0} - \frac{4L_1 + (L_2 + L_6 \frac{2ms^2}{\Delta_0}) \frac{q^2}{2m\Delta_0}}{2sq} \right\} \quad (5.62)$$

$$R_b(q) = -C_B \frac{4L_1 + (L_{10} - L_{12} \frac{2ms^2}{\Delta_0}) \frac{q^2}{2m\Delta_0}}{2sq} \quad (5.63)$$

dove gli L_i sono definiti dalle (3.104) – (3.114) e

$$C_B = \frac{1}{\beta\Omega} \frac{\pi^2}{m} \frac{\Delta_0^2}{\sqrt{2m\Delta_0}} \frac{1}{b^*} . \quad (5.64)$$

Nel limite di accoppiamento forte ($k_f \xi_{pair} \ll 1$) si può mostrare che le (5.61) – (5.63) si riducono rispettivamente a

$$R_{b1}(q) = \frac{8\pi\epsilon_0^2 a_s^3}{\beta\Omega} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\frac{q^2}{2m_B} + \mu_B}{sq} \right) \quad (5.65)$$

$$R_{b2}(q) = \frac{8\pi\epsilon_0^2 a_s^3}{\beta\Omega} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\frac{q^2}{2m_B} + \mu_B}{sq} \right) \quad (5.66)$$

$$R_b(q) = -\frac{8\pi\epsilon_0^2 a_s^3}{\beta\Omega} \frac{\mu_B}{2sq} \quad (5.67)$$

nelle quali abbiamo definito una massa bosonica

$$m_B \equiv 2m \quad (5.68)$$

e un potenziale chimico bosonico

$$\mu_B \equiv \epsilon_0 + 2\mu_0 \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta_0^2}{\epsilon_0} \quad (5.69)$$

5.6 Funzione di vertice nel limite BE

Nel limite BE tutti i fermioni sono legati in coppie e l'energia di legame ϵ_0 è così grande da rendere estremamente improbabile il decadimento di una coppia in due fermioni liberi. Questo permette di trascurare il contributo degli stati del continuo a due particelle e quindi di approssimare la funzione di vertice con

$$G_{Bn}(q) = \frac{8\pi\epsilon_0^2 a_s^3}{\beta\Omega} \left(\frac{u_{Bq}^2}{i\omega_\nu - \omega_b(q)} - \frac{v_{Bq}^2}{i\omega_\nu + \omega_b(q)} \right) \quad (5.70)$$

$$G_{Ba}(q) = -\frac{8\pi\epsilon_0^2 a_s^3}{\beta\Omega} u_{Bq} v_{Bq} \left(\frac{1}{i\omega_\nu - \omega_b(q)} - \frac{1}{i\omega_\nu + \omega_b(q)} \right) \quad (5.71)$$

dove abbiamo utilizzato le (5.65) – (5.67) e definito le quantità

$$v_{Bq}^2 = u_{Bq}^2 - 1 \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{q^2}{2m_B} + \mu_B}{\omega_b(q)} - 1 \right) . \quad (5.72)$$

Nel limite di accoppiamento forte la funzione di vertice riveste quindi il ruolo di propagatore bosonico (a meno di un fattore di normalizzazione).

La densità di un sistema di bosoni fuori dal condensato è per definizione data da

$$\begin{aligned} n_b^{(1)} &\equiv -\frac{1}{\beta\Omega} \sum_q e^{i\omega_\nu\eta} \left(\frac{u_{Bq}^2}{i\omega_\nu - \omega_b(q)} - \frac{v_{Bq}^2}{i\omega_\nu + \omega_b(q)} \right) \\ &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \left(v_{Bq}^2 + (u_{Bq}^2 + v_{Bq}^2)b(\omega_b(q)) \right) \end{aligned} \quad (5.73)$$

da cui risulta per la (5.70) la relazione

$$-\sum_q G_{Bn}(q)e^{i\omega_\nu\eta} = 8\pi\epsilon_0^2 a_s^3 n_b^{(1)} . \quad (5.74)$$

Il fatto che G_{Bn} non sia una vera funzione di Green bosonica risulta chiaramente dalla Ref. [13] dove si dimostra che, nel limite bosonico di accoppiamento forte, i campi fluttuanti di Hubbard-Stratonovich diventano veri campi bosonici *previa* una loro rinormalizzazione proprio per la costante $\sqrt{8\pi\epsilon_0^2 a_s^3}$.

5.7 Calcolo di Δ_1 e μ_1 nel limite BE

Inserendo le (5.65) – (5.67) nelle (5.59) e (5.60) e trascurando il contributo del continuo si ottiene

$$h \approx h_b \approx -\beta\Omega \frac{\Delta_0}{\epsilon_0} n_b^{(1)} , \quad (5.75)$$

$$n_f^{(1)} \approx n_{fb}^{(1)} \approx 2n_b^{(1)} . \quad (5.76)$$

Utilizzando le (5.75) e (5.76), le (2.126) e (2.127), e la (3.134) si possono ricavare lo spostamento Δ_1 del parametro d'ordine e quello μ_1 del potenziale chimico per mezzo della (5.53):

$$\Delta_1 \approx -\frac{1}{2} \frac{n_b^{(1)}}{n_b^{(0)}} \Delta_0 \quad (5.77)$$

$$\mu_1 \approx \frac{\Delta_0^2}{2\epsilon_0} \frac{n_b^{(1)}}{2n_b^{(0)}} \quad (5.78)$$

in cui $n_b^{(o)}$ è la densità di bosoni nel condensato data da

$$n_b^{(o)} \approx \frac{n_f^{(o)}}{2} \approx \frac{\Delta_0^2}{8\pi\epsilon_0^2 a_s^3} \quad (5.79)$$

Calcoliamo infine la quantità

$$N_b \equiv \frac{1}{\beta\Omega} \sum_q e^{i\omega_\nu n} \langle b(q)b^*(q) \rangle_{S_{eff}^{(2)}} \quad (5.80)$$

con $b(q)$ dato dalla (2.27). Ricordando che [13]

$$\langle \tilde{b}(q) \rangle_{S_{eff}^{(2)}} = \langle \tilde{b}^*(0) \rangle_{S_{eff}^{(2)}} = \Delta_1 \quad , \quad (5.81)$$

$$\langle \tilde{b}(q)\tilde{b}^*(q) \rangle_{S_{eff}^{(2)}} = -G_{Bn}(q) \quad , \quad (5.82)$$

la (5.80) diventa

$$N_b = \frac{\beta}{\Omega} 8\pi\epsilon_0^2 a_s^3 \left[\frac{\Delta_0^2}{8\pi\epsilon_0^2 a_s^3} \left(1 + \frac{2\Delta_1}{\Delta_0} \right) + n_b^{(1)} \right] \quad (5.83)$$

e, ricordando le (5.77) e (5.79),

$$N_b = \frac{\beta}{\Omega} 8\pi\epsilon_0^2 a_s^3 \left[\left(n_b^{(0)} - n_b^{(1)} \right) + n_b^{(1)} \right] = \frac{\beta}{\Omega} \Delta_0^2 \quad . \quad (5.84)$$

Quindi N_b coincide, a parte un fattore di normalizzazione, con la densità bosonica. Inoltre si vede che, anche nel limite di temperatura zero, non tutti i bosoni sono nel condensato.

5.8 Densità degli stati di particella singola

La densità degli stati (per proiezione di spin) di particella singola all'ordine λ è data dalla (2.60). Il risultato in approssimazione di campo medio è fornito dalla (2.110), la quale può essere utilizzata per calcolare i contributi dovuti agli spostamenti Δ_1 del parametro d'ordine e μ_1 del potenziale chimico. È infatti sufficiente sostituire Δ_0 e μ_0 rispettivamente con le (5.31) e (5.32) e sviluppare fino al primo ordine in λ . Il contributo restante all'ordine λ è dovuto alle fluttuazioni e si può ottenere dalla (2.60):

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(\omega) = & -\frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BaI}^R(\mathbf{q}, \omega') 2u_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} \\
& \times \left\{ \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right] \right. \\
& - \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right] \\
& + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right] \\
& \left. - \frac{u_{\mathbf{k}}^2 - v_{\mathbf{k}}^2}{2E_{\mathbf{k}}} \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right] \right. \\
& \quad \left. - u_{\mathbf{k}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + u_{\mathbf{k}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right) \right] \right. \\
& \quad \left. - v_{\mathbf{k}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right) \right] \right. \\
& \quad \left. + v_{\mathbf{k}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right) \Big] \Big\} \\
& \quad - \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BnI}^R(\mathbf{q}, \omega') \\
& \times \left\{ \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right] \right. \\
& + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right] \\
& \quad \quad + u_{\mathbf{k}}^4 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right) \right] \\
& \quad \quad + u_{\mathbf{k}}^4 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \quad \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right) \right] \\
& \quad \quad - v_{\mathbf{k}}^4 u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right) \right] \\
& \quad \quad - v_{\mathbf{k}}^4 v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \quad \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega') \right) \right] \Big\} \\
& \quad - \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\pi} G_{BnI}^R(\mathbf{q}, \omega') u_{\mathbf{k}^2} v_{\mathbf{k}^2} \\
& \times \left\{ -\frac{u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega') \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega') \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega') \right] \\
& -\frac{v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega') \right] \\
& \quad + u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega') \right) \right] \\
& \quad + v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega'} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega') \right) \right] \\
& \quad - u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega') \right) \right] \\
& \quad - v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 \frac{1 - f(E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + b(\omega')}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left[-\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega'} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega') \right) \right] \left. \right\} \quad (5.85)
\end{aligned}$$

Considerando il solo contributo dello stato legato nel limite di temperatura zero si ottiene in particolare:

$$\begin{aligned}
N_b^{(1)}(\omega) &= \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 R_{b1}(q) \\
&\times \left\{ \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right] \right. \\
&+ \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right] \\
&- \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right] \\
&- \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right] \\
&\quad \left. + \frac{u_{\mathbf{k}}^4}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right) \Big] \\
& \quad + \frac{v_{\mathbf{k}}^4}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right) \Big] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right) \Big] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \left. -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right) \right] \Big\} \\
& \quad - \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^2 R_{b2}(q) \\
& \times \left\{ \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right] \right. \\
& + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right] \\
& - \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right] \\
& - \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}}} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^4}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right) \Big] \\
& \quad + \frac{v_{\mathbf{k}}^4}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right) \Big] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& -\frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right) \right] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2 v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right) \right] \Big\} \\
& \quad - \frac{\beta}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} 2u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} v_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} R_b(q) \\
& \times \left\{ \begin{aligned}
& \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}^2} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right] \\
& + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}^2} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right] \\
& - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}^2} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right] \\
& - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2E_{\mathbf{k}}^2} \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right) \right] \\
& \quad + \frac{v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)) \right) \right] \\
& \quad + \frac{u_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)} \left(\delta(\omega - E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right) \right] \\
& \quad - \frac{v_{\mathbf{k}}^2}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left[\frac{\partial}{\partial E_{\mathbf{k}}} \delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_b(q)} \left(\delta(\omega + E_{\mathbf{k}}) - \delta(\omega + E_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_b(q)) \right) \right] \Big\} \quad (5.86)
\end{aligned}
\right.
\end{aligned}$$

Utilizzando poi le (5.65) – (5.67), si ottiene per la (5.86) all’ordine dominante nel limite BE:

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(\omega) \approx N_b^{(1)}(\omega) &\approx \frac{m}{2\pi^2} \sqrt{2m \left(\omega - \frac{\epsilon_0}{2} \right)} \\
&\times \frac{16}{(3\pi)^{\frac{5}{2}}} (k_f a_s)^{\frac{9}{2}} \frac{\epsilon_0^2}{\omega^2} \theta \left(\omega - \frac{\epsilon_0^2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{5.87}$$

La (5.87) rappresenta una piccola correzione alla (2.110) ed è caratterizzata da un massimo poco pronunciato a $\omega = 2\epsilon_0/3$.

Capitolo 6

Conclusioni

Concludiamo riassumendo i risultati riportati in questa tesi. Abbiamo considerato il caso piú semplice possibile di un sistema continuo di fermioni di spin $s = 1/2$ interagenti in modo istantaneo con un potenziale attrattivo indipendente dallo spin e a corto raggio (potenziale “di contatto”). Abbiamo inoltre assunto che il meccanismo di appaiamento tra particelle sia quello della teoria BCS (coppie con spin totale zero).

Utilizzando alcune funzioni speciali della fisica-matematica (ovvero, gli integrali ellittici completi di prima e seconda specie nella forma normale di Legendre) abbiamo mostrato come sia possibile, *anche* per un sistema tridimensionale, calcolare *analiticamente* le grandezze fisiche in approssimazione di campo medio per valori *arbitrari* del parametro d'accoppiamento. Inoltre abbiamo visto che i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione di vertice, nel limite di “piccoli” valori di $|\mathbf{q}|$ e ω , sono dati da combinazioni lineari degli stessi integrali ellittici. Questo ci ha consentito di ottenere risultati analitici anche per la velocità del suono s e per la lunghezza di coerenza di fase ξ_{phase} . Con l'ausilio del calcolo numerico, abbiamo studiato poi lo spettro delle eccitazioni collettive $\omega_b(q)$ per valori arbitrari del vettore d'onda \mathbf{q} , evidenziandone i cambiamenti al variare del parametro d'accoppiamento. Abbiamo quindi rivolto la nostra attenzione allo studio della funzione di vertice sul foglio non fisico della superficie di Riemann. Anche se la nostra analisi non ha permesso di riscontrare l'esistenza di vere e proprie quasirisonanze, il comportamento anomalo del denominatore della funzione di vertice

per accoppiamenti intermedi ci ha indotto a supporre che ciò possa influenzare l'andamento della densità degli stati di particella singola. Abbiamo infine mostrato che lo spostamento Δ_1 del parametro d'ordine è proporzionale alla densità fuori dal condensato nel limite Bose-Einstein.

La grande complessità matematica delle formule che coinvolgono l'approssimazione a un "loop" non ci ha ancora permesso di conseguire risultati espliciti nel regime di accoppiamento intermedio. Tuttavia alla luce di recenti risultati sperimentali che hanno messo in evidenza, in alcuni superconduttori ad alta temperatura, una struttura non BCS nella densità degli stati di particella singola, può risultare di grande interesse proseguire con il calcolo numerico delle espressioni a un "loop" del Capitolo 5. In tal modo sarà possibile stabilire se il nostro modello sia sufficiente a interpretare i risultati sperimentali, oppure se sia necessario utilizzare modelli più sofisticati (quali il modello di Hubbard, il sistema carico, etc.). Un tale programma esula dagli scopi della presente tesi ma sarà affrontato nel prossimo futuro.

Ringraziamenti

Desidero anzitutto ringraziare il relatore di questa tesi, il Prof. Giancarlo C. Strinati, per la costante attenzione e per l'indispensabile aiuto ricevuti e per la possibilità offertami di studiare uno dei campi più affascinanti della Fisica dello Stato Solido.

Vorrei, inoltre, cogliere l'occasione per ringraziare il Dottor Fabio Pistolesi per il costante sostegno durante il lavoro di tesi e i preziosi suggerimenti ricevuti, in particolare nel calcolo numerico.

Appendice A

Integrali ellittici

In questa Appendice, sono date, allo scopo di una rapida consultazione, la definizione, le principali proprietà e i risultati piú importanti sugli integrali ellittici, rinviando per approfondimenti e dimostrazioni ai testi specializzati sull'argomento (per esempio, si veda i riferimenti [14] e [15]).

Gli integrali ellittici sono integrali del tipo

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx \quad , \quad (\text{A.1})$$

ove $R(x_1, x_2)$ é una funzione razionale delle variabili x_1, x_2 e $P(x)$ è un polinomio di terzo o quarto grado, privo di zeri multipli.

Un teorema dovuto a Legendre afferma che ogni integrale ellittico può essere espresso come combinazione lineare, con coefficienti costanti, di un integrale di una funzione razionale di x e di integrali del seguente tipo:

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} \quad , \quad (\text{A.2})$$

$$\int dx \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$\int dx \frac{1}{1+nx^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2x^2}} \quad . \quad (\text{A.4})$$

I tre integrali (A.2), (A.3) e (A.4) sono rispettivamente indicati come integrali ellittici del primo, del secondo e del terzo tipo nella forma normale di Legendre; k è detto *modulo* dell'integrale ellittico ($0 \leq k < 1$), $k' = \sqrt{1-k^2}$

è il modulo complementare e n è il *parametro* dell'integrale ellittico del terzo tipo.

Ponendo $x = \sin \alpha$ si ottiene:

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi d\alpha \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad , \quad (\text{A.5})$$

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi d\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \quad , \quad (\text{A.6})$$

$$\Pi(\phi, n, k) = \int_0^\phi d\alpha \frac{1}{1 + n \sin^2 \alpha} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad . \quad (\text{A.7})$$

Quando $\phi = \pi/2$, l'integrale ellittico si dice completo. Si nota facilmente che

$$F(-\phi, k) = -F(\phi, k) \quad ,$$

$$E(-\phi, k) = -E(\phi, k) \quad ,$$

$$F(n\pi \pm \phi, k) = 2nF\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \pm F(\phi, k) \quad ,$$

$$E(n\pi \pm \phi, k) = 2nE\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \pm E(\phi, k) \quad .$$

Essendo $k^2 < 1$, si può sviluppare in serie binomiale la funzione integranda nelle (A.5) e (A.6) e quindi valutare i due integrali. Il risultato per $\phi = \pi/2$ è:

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2 k^{2n} + \dots \right\} \quad , \quad (\text{A.8})$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2^2} k^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} k^4 - \dots - \left(\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{2n-1} - \dots \right\} \quad . \quad (\text{A.9})$$

Le due serie sono rapidamente convergenti per $k^2 \ll 1$, mentre per $k \rightarrow 1$ la convergenza è molto lenta; in questo caso si possono utilizzare le due seguenti espansioni in serie in potenze di k' :

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= \log \frac{4}{k'} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2}\right) k'^2 \\
&\quad + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) k'^4 \\
&\quad + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2}{5 \cdot 6}\right) k'^6 + \dots \quad , \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= 1 + \frac{1}{2} \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{1}{1 \cdot 2}\right) k'^2 \\
&\quad + \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4} \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4}\right) k'^4 \\
&\quad + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left(\log \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6}\right) k'^6 + \dots \quad . \quad (\text{A.11})
\end{aligned}$$

La riduzione di un integrale ellittico alla forma normale di Legendre può risultare particolarmente lunga e laboriosa, poiché il tipo di trasformazione di variabile da utilizzare dipende sia dall'intervallo di integrazione che dal tipo di zeri (reali o complessi) del polinomio $P(x)$.

Rinviano ai testi specializzati per una casistica completa (per esempio, si veda [14], [15]), riportiamo qui i soli due casi che ci interessano:

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty dx \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2b^2x^2 + a^4}} = \frac{1}{2a} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad , \quad (\text{A.12})$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2}{(x^4 + 2b^2x^2 + a^4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{a^4 - b^4} E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \frac{1}{2a} \frac{1}{a^2 - b^2} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad , \quad (\text{A.13})$$

in cui

$$a^2 > b^2 > -\infty, \quad a^2 > 0 \quad , \quad k^2 = \frac{a^2 - b^2}{2a^2} \quad .$$

Gli integrali $J_5(x_0)$ e $J_6(x_0)$, utilizzati per esprimere le grandezze fisiche di interesse, si identificano rispettivamente con (A.13) e (A.12), una volta posto

$$a^2 = \sqrt{x_0^2 + 1} \quad ,$$

$$b^2 = -x_0 \quad .$$

Risulta quindi

$$k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right) \quad ; \quad (\text{A.14})$$

nel limite BCS ($x_0 \gg 1$) si ha

$$k^2 \rightarrow 1 - \frac{1}{4x_0^2}$$

ed è sufficiente utilizzare i primi termini dello sviluppo in serie in potenze di k' , mentre nel limite BE ($x_0 < 0$, $|x_0| \gg 1$) risulta

$$k^2 \rightarrow \frac{1}{4x_0^2}$$

e basta tener conto di pochi termini nello sviluppo in serie in potenze di k . Per accoppiamenti intermedi occorre invece calcolare tanti termini della serie fino ad ottenere la precisione desiderata. Tale calcolo può essere effettuato numericamente utilizzando procedure standard.

Appendice B

Risultati analitici per la lunghezza di coerenza di fase a temperatura zero

Lo scopo di questa Appendice è di fornire una descrizione analitica della lunghezza di coerenza di fase a temperatura zero per un potenziale particolarmente semplificato (potenziale “di contatto”).

Utilizzando il formalismo dell’integrazione funzionale e l’espansione in “loop” associata, Pistolesi e Strinati [13] hanno mostrato che la lunghezza di coerenza di fase, la quale é associata alle fluttuazioni spaziali del parametro d’ordine, è per qualsiasi potenziale data dalla relazione

$$\xi_{phase} = \sqrt{\frac{c_1}{c_0}} \quad , \quad (B.1)$$

in cui c_0 e c_1 sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor della funzione $A(\mathbf{q}, 0) + B(\mathbf{q}, 0)$:

$$A(\mathbf{q}, 0) + B(\mathbf{q}, 0) = c_0 + c_1 \mathbf{q}^2 + \dots \quad . \quad (B.2)$$

Per un potenziale “di contatto”, utilizzando lo sviluppo per “piccoli” q e ω delle funzioni A e B , dato rispettivamente dalle (3.12) e (3.13), si ha che

$$c_0 = 2I_1 \quad (B.3)$$

$$c_1 = I_2 + I_{10} \quad . \quad (\text{B.4})$$

Nel caso 2D, ricordando le (3.38), (3.39) e (3.47), si ottiene quindi

$$c_0 = \frac{m}{4\pi} \left(1 + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 1}} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$c_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{12\Delta_0} \left(x_0 + \frac{x_0^4 + 3x_0^2 + 1}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad , \quad (\text{B.6})$$

da cui si deduce che

$$k_f^2 \xi_{phase}^2 = \frac{1}{6} \frac{\epsilon_f}{\Delta_0} \frac{\sqrt{x_0^2 + 1}}{\sqrt{x_0^2 + 1 + x_0}} \left(x_0 + \frac{x_0^4 + 3x_0^2 + 1}{(x_0^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right) \quad . \quad (\text{B.7})$$

Utilizzando la (2.112) si arriva finalmente alla

$$k_f^2 \xi_{phase}^2 = \frac{1}{12} \left(x_0 \sqrt{x_0^2 + 1} + x_0^2 + 2 - \frac{1}{x_0^2 + 1} \right) \quad (\text{B.8})$$

da confrontare con la (2.111).

Nel caso 3D, ricordando le (3.93), (3.94) e (3.102) abbiamo invece

$$c_0 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} 4m \sqrt{2m\Delta_0} J_5(x_0) \quad (\text{B.9})$$

$$c_1 = \frac{\pi}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2m}{\Delta_0}} (L_2 + L_{10}) \quad (\text{B.10})$$

dove, dalle (3.105) e (3.113), si ha

$$L_2 + L_{10} = 2J_{10}(x_0) - 4J_8(x_0) + \frac{20}{3} J_{13}(x_0) \quad (\text{B.11})$$

Utilizzando le (3.122), (3.125) e (3.128) e la (2.96), si arriva con semplici passaggi algebrici all'espressione

$$k_f^2 \xi_{phase}^2 = \frac{(x_0 J_5(x_0) + J_6(x_0))^{\frac{5}{3}}}{9J_5(x_0)} \times \left(1 - \frac{3}{4} \frac{1}{x_0^2 + 1} + \frac{3}{2} \frac{J_6(x_0)}{x_0 J_5(x_0) + J_6(x_0)} \right) \quad (\text{B.12})$$

da confrontare con la (2.94).

Analizziamo ora per completezza i due limiti estremi di debole e forte accoppiamento, dove si ottengono risultati particolarmente semplici. Nel limite BCS ($k_f \xi_{pair} \gg 1$) si ricava facilmente

$$k_f \xi_{phase} \approx \frac{x_0}{3} \approx \frac{\sqrt{2}}{3} k_f \xi_{pair} \quad (3D) \quad (B.13)$$

$$k_f \xi_{phase} \approx \frac{x_0}{\sqrt{6}} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} k_f \xi_{pair} \quad (2D). \quad (B.14)$$

Quindi nel limite BCS esiste una sola scala di lunghezza che caratterizza il problema e specifica sia la separazione spaziale di una coppia di Cooper che la variazione spaziale del parametro d'ordine.

Nel limite Bose-Einstein ($k_f \xi_{pair} \ll 1$) si ottiene invece

$$k_f \xi_{phase} \approx \left(\frac{3\pi}{16} |x_0| \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{\sqrt{3\pi}}{4\sqrt[4]{2}} \frac{1}{\sqrt{k_f \xi_{pair}}} \quad (3D) \quad (B.15)$$

$$k_f \xi_{phase} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (2D). \quad (B.16)$$

Al contrario di quanto avviene nel limite BCS, nel limite BE la lunghezza di coerenza di fase dipende dalla dimensionalità del sistema. Inoltre, in questo limite, ξ_{phase} , deducibile dagli esperimenti, si differenzia marcatamente dalla lunghezza di coerenza di coppia, la quale è invece associata alla distanza spaziale delle particelle legate in coppie. Per completezza, mostriamo in Figura B.1 l'andamento di $k_f \xi_{phase}$ in funzione di $k_f \xi_{pair}$ in 3D ottenuto con i metodi analitici sviluppati in questa tesi.

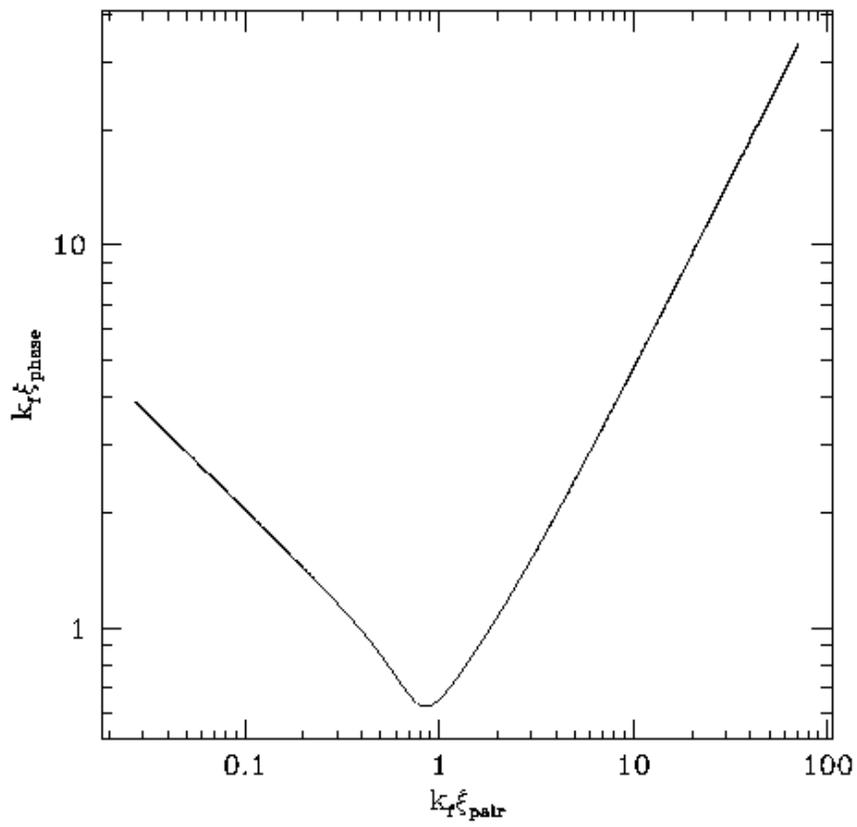


Figura B.1: $k_f \xi_{phase}$ in funzione di $k_f \xi_{pair}$

Bibliografia

- [1] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (John Wiley & Sons, 1983).
- [2] V. N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Riedel, Dordrecht, 1983).
- [3] V. N. Popov, *Functional Integrals and Collective Excitations* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).
- [4] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Prentice-Hall, Englewood Cliff, N. J., 1963).
- [5] A. L. Fetter and J. D. Walecka, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (McGraw-Hill, New York, N. Y., 1971).
- [6] L. P. Pitaevskii, *Sov. Phys. JETP* **9**, 830 (1959).
- [7] M. Randeria, Ji-Min Duan and Lih-Yir Shieh, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 981 (1989); *Phys. Rev. B* **41**, 327 (1990).
- [8] C. A. R. Sá de Melo, M. Randeria and J. R. Engelbrecht, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3202 (1993).
- [9] P. Nozieres and Schmitt-Rink, *J. Low Temp. Phys.* **59**, 195 (1985).
- [10] R. Haussmann, *Z. Phys. B* **91**, 291 (1993); *Phys. Rev. B* **49**, 12975 (1994).

- [11] S. V. Traven, Phys. Rev. Lett. **73**, 3451 (1994); Phys. Rev. B **51**, 3242 (1995).
- [12] F. Pistolesi and G. C. Strinati, Phys. Rev. B **49**, 6356 (1994).
- [13] F. Pistolesi and G. C. Strinati, Phys. Rev. B **53**, 15168 (1996).
- [14] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. II, 1953 (New York: McGraw-Hill).
- [15] I. S. Gradshteyn and I. W. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1980).
- [16] E. Dagotto, Rev. Mod. Phys., Vol. 66, No. 3, 763 (1994)