ESERCIZI

1. Un giocatore vince 35 euro se il gioco gli è favorevole, perde 5 euro in caso contrario. Se la probabilità che egli vinca è 1/8, il gioco è equo?
2. Veronica, nel gioco delle freccette, ha fatto centro 30 volte su 70 lanci (tutti i tiri si suppone che siano avvenuti nelle stesse condizioni), poi 15 centri su 40 lanci, poi ancora 20 centri su 50 lanci. Stima che probabilità ha Veronica di colpire il centro al prossimo tiro?
3. Lucia gioca contro il banco e la sua probabilità di vincere 210 euro è 2/7. Quanto deve vincere il banco perché il gioco sia equo?
4. In un gioco equo Marta vince 120 euro con probabilità ¼. Quale cifra perde?
5. Marco, avendo comprato un motorino, vuole assicurarlo contro il furto. Per questo deve pagare alla compagnia di assicurazione 150 euro per un anno, in cambio riceverà 1000 euro se il motorino verrà rubato. Quale probabilità viene attribuita a tale evento dalla compagnia di assicurazione?
6. Due eventi A e B sono stocasticamente dipendenti e si conoscono le seguenti probabilità: p(A | B) = 0,32; p(B | A) = 0,48; p(B) = 0,85. Calcola p(A) e p(A e B).
7. Una scatola contiene 12 pile, di cui 4 scariche. Tre pile vengono estratte a caso dalla scatola, una dopo l'altra. Determinare la probabilità che tutte e tre le pile siano scariche.
8. Tre persone tirano al bersaglio. Le probabilità di fare "centro" sono rispettivamente uguali a 0,75; 0,80; 0,90. Qual è la probabilità che tutti e tre i tiratori colpiscano il bersaglio?
9. Nelle condizioni dell'esercizio precedente, trovare la probabilità che almeno uno dei tiratori colpisca il bersaglio.
10. La probabilità che un uomo viva altri 10 anni è ¼ e la probabilità che sua moglie viva altri 10 anni è 1/3. Determinare la probabilità che: a) entrambi siano vivi fra 10 anni; b) almeno uno sia vivo fra 10 anni; c) né l'uno né l'altra siano vivi fra 10 anni; d) soltanto la moglie sia viva fra 10 anni.
11. Per produrre uno stesso articolo sono impiegate tre macchine diverse, H_1, H_2 e H_3 che producono pezzi difettosi con le seguenti rispettive probabilità: 1%, 2% e 0,1%. Le tre macchine producono rispettivamente il 30%, il 50% e il 20% della produzione totale. Si chiede la probabilità: a) che un pezzo uscito dalla fabbrica sia difettoso; b) che un pezzo difettoso sia stato prodotto dalla macchina H_2.
12. Si hanno tre urne: H_1 contiene 2 palline bianche e 2 nere; H_2 contiene 3 palline bianche e 1 nere; H_3 contiene 4 palline bianche e 2 nere. Si lanciano due monete e si sceglie un'urna: con due teste si sceglie l'urna H_1, con due croci l'urna H_3 e con una testa e una croce l'urna H_2. Scelta l'urna, si estrae una pallina. Qual è la probabilità che la pallina estratta sia bianca?
13. Gli eventi H_1, H_2, H_3 e H_4 costituiscono un sistema completo di alternative con probabilità rispettive uguali a 0,15 0,25 0,38 0,22. Un evento E è condizionato alle quattro alternative precedenti con le seguenti probabilità: $p(E \mid H_1)=0,20$ $p(E \mid H_2)=0,40$ $p(E \mid H_3)=0,35$ $p(E \mid H_4)=0,50$. Calcola la probabilità che, una volta verificatosi, l'evento E dipenda dalla causa H_2. Calcola inoltre la probabilità che tale evento E non dipenda dalla causa H_3.
14. Uno studente si presenta poco preparato a un esame e valuta di poter svolgere da solo il compito con probabilità del 40% e di poter copiare con probabilità del 60%. Data la sua scarsa preparazione, la probabilità di fare giusto il compito è del 35% e, se copia, ha invece probabilità del 30% di copiare da un compagno che sa fare il compito. Nell'ipotesi che il compito sia stato svolto correttamente, calcola la probabilità che lo studente l'abbia fatto da solo.
15. Un test diagnostico è in fase sperimentale e attualmente fornisce esito positivo nel 90% dei casi in cui una certa disfunzione è effettivamente presente e anche nell'1% dei casi in cui la disfunzione non è presente. Da ricerche collaterali, si sa che la percentuale di soggetti che hanno tale disfunzione è il 3% della popolazione diagnosticata. Calcola la probabilità che la disfunzione sia comunque presente anche nel caso in cui il test abbia dato esito negativo.
16. Tra mille monete normali è stata inserita una moneta falsa che, lanciata in aria, cade dalla parte della Testa (con una probabilità iniziale che supponiamo del 100%). Si sceglie a caso una moneta e, lanciatala venti volte di seguito, esce sempre Testa. Qual è la probabilità che la moneta scelta sia proprio quella falsa?
17. È noto da un'indagine statistica su una certa popolazione che la percentuale totale di coloro che hanno assunto droghe leggere è del 9% e che i consumatori di droghe pesanti sono il 2% della popolazione considerata. Il 90% dei consumatori di droghe pesanti aveva prima assunto anche droghe leggere. Si può dedurre da ciò che l'assunzione di droghe leggere aumenta la probabilità di diventare consumatori di droghe pesanti?
18. In un romanzo ambientato in epoca medioevale, si narra di un prigioniero condannato all'impiccagione a cui viene data la seguente possibilità di salvarsi: date 4 palline di cui 2 bianche e 2 nere egli dovrà disporle come vuole in 2 urne (in ogni urna ci deve essere almeno una pallina); fatto ciò egli dovrà scegliere a caso una delle due urne e quindi estrarre da essa una pallina; se la pallina estratta è bianca, avrà salva la vita. Esiste una disposizione delle palline nelle due urne che ottimizzi le probabilità del prigioniero?
19. Una scatola può contenere con pari probabilità un anello d'oro o uno d'argento, indistinguibili al tatto. Si aggiunge un anello d'oro nella scatola (anch'esso indistinguibile), si agita e si estrae a caso un anello. Esso è d'oro. Quanto vale la probabilità che nella scatola ci sia rimasto ancora un anello d'oro?

20. Roulette russa: ogni giocatore ruota a caso il tamburo di una pistola e poi si spara. Qual è la probabilità di sopravvivere dopo n prove, se ogni volta si fa ruotare il tamburo? (La pistola ha sei colpi).
    Variante (col morto) della roulette russa. Sei giocatori decidono di ruotare a caso una sola volta il tamburo e di provare uno dopo l'altro. Quale dei giocatori ha maggiore probabilità di sopravvivere?
21. È più probabile che esca un "sei" su 4 lanci di un dado o un "doppio sei" su 24 lanci di due dadi? (Questo è uno dei problemi classici della probabilità proposto dal Cavalier de Méré a Pascal).
22. Tre signore ("bionda", "mora" e "rossa") si incontrano in treno e, conversando, si scambiano delle informazioni sulla loro vita privata. Dopo un po' entra nello stesso scompartimento anche un matematico. Questi si siede, ascolta distrattamente la conversazione fra le signore e, dopo un po', scende alla fermata successiva a quella nella quale era salito. Mentre si allontana ripensa un attimo al fatto che, da quanto ha sentito, tutte le signore hanno due figli e che, inoltre: la bionda ha almeno un figlio maschio; il figlio maggiore della mora è maschio. Ne conclude che la probabilità che le signore abbiano entrambi i figli maschi è diversa nei tre casi. Ha ragione?
23. Durante una trasmissione televisiva due concorrenti hanno la possibilità di vincere un premio. Il conduttore mostra loro tre scatole, spiega che in una di esse c'è l'assegno e che le altre sono vuote. Quindi li invita a scegliere ciascuno una scatola. Successivamente il primo concorrente apre la sua scatola e questa risulta vuota. Il conduttore offre allora all'altro concorrente la possibilità di scambiare la scatola che egli ha scelto con la terza rimasta. L'offerta è vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente?
24. Variazione sul tema. Durante una trasmissione televisiva un concorrente ha la possibilità di vincere un premio. Il conduttore gli mostra tre scatole, gli spiega che in una di esse c'è l'assegno e che le altre sono vuote e quindi lo invita a scegliere una scatola. Dopo che il concorrente ha scelto la scatola, ma non l'ha ancora aperta, il conduttore dichiara di conoscere in quale scatola è il premio. Dichiara inoltre che aprirà, fra le due scatole non scelte, una scatola che è sicuramente vuota. In effetti la scatola che apre non contiene il premio. A questo punto il conduttore offre al concorrente la possibilità di scambiare la scatola che egli ha scelto con la terza rimasta. L'offerta è vantaggiosa, svantaggiosa o indifferente? (Confrontare con il problema precedente e dare almeno una risposta intuitiva.)
25. Una persona dichiara che la probabilità che una moneta regolare e lanciata a caso dia testa è pari a 0.8, in quanto la valutazione soggettiva della probabilità gli consente di dire qualsiasi numero compreso fra 0 e 1. Cosa gli si può proporre per mettere alla prova la sua convinzione? E se avesse dichiarato 0.3?
26. Un ragazzo, al riaprirsi delle scuole, effettua un rapido calcolo sui viaggi effettuati con gli autobus urbani nell'ultimo anno e stima di aver effettuato circa 1500 corse, durante le quali ha incontrato solo tre volte il controllore. Sapendo che il costo dell'abbonamento è di 25 euro al mese, mentre l'eventuale multa costa 30 euro, troverà più conveniente comprare l'abbonamento o utilizzare i soldi che riceve dalla famiglia per divertirsi?
27. Ad una persona vengono presentate due buste e gli viene comunicato che ciascuna di esse contiene un assegno. La cifra dei due assegni è ignota, ma sicuramente uno dei due assegni è di un importo 10 volte l'altro. La persona può scegliere a caso una delle buste, aprirla, constatare il contenuto e dopo ha il diritto di decidere se cambiare l'assegno visto con quello dell'altra busta. Ammettiamo, per fissare le idee, che la busta contenga 50 euro. Qual è la decisione più conveniente? Discutere gli aspetti paradossali del problema.
28. Secondo la teoria dell'ereditarietà di Mendel, il carattere è determinato da geni *alleli* (geni omologhi con effetti differenti). Nel caso dei piselli, per esempio, i geni che determinano il colore dei semi si presentano in due alleli di cui uno *dominante* e l'altro *recessivo*. Se nella coppia di geni è presente almeno un gene dominante la pianta ha i semi gialli, altrimenti verdi. Indichiamo con G e g i due alleli, dove la notazione g ricorda che il carattere "seme verde" (ovvero "seme non giallo") è recessivo. In ogni processo di riproduzione ciascuno dei genitori trasmette, con pari probabilità, uno dei suoi due geni.
    (a) Se piselli omozigoti (ovvero con alleli identici) del tipo (G, G) sono incrociati con piselli del tipo (g, g), quanto vale la probabilità di ottenere discendenti aventi i genotipi (G, G), (G, g) e (g, g). Quanto vale la probabilità che essi presentino il carattere "seme verde"?
    (b) Supponiamo di lasciare incrociare fra di loro gli individui della prima generazione. Quanto vale la probabilità che nella seconda generazione si ottengano piselli dai semi gialli e verdi?
    (c) Se i piselli ottenuti nella prima generazione sono incrociati con piselli dai semi verdi, quanto vale la probabilità di ottenere piselli dai semi verdi?
    (d) Se i piselli gialli della seconda generazione sono incrociati con piselli verdi, quanto vale la probabilità di ottenere piselli dai semi verdi?
    (e) Supponiamo di lasciar incrociare fra loro i soli piselli dai semi gialli ottenuti nella seconda generazione e di continuare la selezione nelle generazioni successive. Quante altre generazioni sono necessarie per ottenere piante con almeno il 99,9% della specie dai semi gialli?