

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO DI ORDINAMENTO

**Tema di: MATEMATICA**

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

**PROBLEMA 1**

Si consideri un tetraedro regolare  $T$  di vertici  $A, B, C, D$ .

- Indicati rispettivamente con  $V$  ed  $S$  il volume e l'area totale di  $T$  e con  $r$  il raggio della sfera inscritta in  $T$ , trovare una relazione che leghi  $V, S$  ed  $r$ .
- Considerato il tetraedro regolare  $T'$  avente per vertici i centri delle facce di  $T$ , calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di  $T$  e  $T'$  e il rapporto fra i volumi di  $T$  e  $T'$ .
- Condotto il piano  $\alpha$ , contenente la retta  $AB$  e perpendicolare alla retta  $CD$  nel punto  $E$ , e posto che uno spigolo di  $T$  sia lungo  $s$ , calcolare la distanza di  $E$  dalla retta  $AB$ .
- Considerata nel piano  $\alpha$  la parabola  $p$  avente l'asse perpendicolare alla retta  $AB$  e passante per i punti  $A, B$  ed  $E$ , riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di  $p$ .
- Determinare per quale valore di  $s$  la regione piana delimitata dalla parabola  $p$  e dalla retta  $EA$  ha area  $\frac{\sqrt{2}}{3} \text{ cm}^2$ .

**PROBLEMA 2**

È assegnata la funzione  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+m+|m|}$ , dove  $m$  è un parametro reale.

- Determinare il suo dominio di derivabilità.
- Calcolare per quale valore di  $m$  la funzione ammette una derivata che risulti nulla per  $x = 1$ .
- Studiare la funzione  $f(x)$  corrispondente al valore di  $m$  così trovato e disegnarne il grafico  $\gamma$  in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali  $(Oxy)$ , dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di  $\gamma$  ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.
- Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico  $\gamma$ , dall'asse  $x$  e dalla retta di equazione  $x = 1$ .

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

CORSO DI ORDINAMENTO

**Tema di: MATEMATICA**

**QUESTIONARIO**

1. Dopo aver fornito la definizione di “rette sghembe”, si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette  $x, y, z$ , due a due distinte, se  $x$  ed  $y$  sono sghembe e, così pure, se sono sghembe  $y$  e  $z$  allora anche  $x$  e  $z$  sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
2. Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.
3. Dal punto  $A$ , al quale è possibile accedere, è visibile il punto  $B$ , al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza  $AB$ . Dal punto  $A$  si può però accedere al punto  $P$ , dal quale, oltre ad  $A$ , è visibile  $B$  in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza  $PB$ , è tuttavia possibile misurare la distanza  $AP$ . Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che  $P$  non è allineato con  $A$  e  $B$ , spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza  $AB$ .
4. Il dominio della funzione  $f(x) = \ln \left\{ \sqrt{x+1} - (x-1) \right\}$  è l'insieme degli  $x$  reali tali che:  
A)  $-1 < x \leq 3$ ;    B)  $-1 \leq x < 3$ ;    C)  $0 < x \leq 3$ ;    D)  $0 \leq x < 3$ .

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5. La funzione  $2x^3 - 3x^2 + 2$  ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.
6. La derivata della funzione  $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$  è la funzione  $f'(x) = 2x e^{-x^4}$ . Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.
7. Considerati i primi  $n$  numeri naturali a partire da 1:

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n,$$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

$$\text{A) } \frac{1}{4}n^2(n+1)^2; \quad \text{B) } \frac{1}{3}n(n^2-1); \quad \text{C) } \frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1); \quad \text{D) } \frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2).$$

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

## CORSO DI ORDINAMENTO

**Tema di: MATEMATICA**

8.  $x$  ed  $y$  sono due numeri naturali dispari tali che  $x - y = 2$ . Il numero  $x^3 - y^3$ :
- A) è divisibile per 2 e per 3.
  - B) è divisibile per 2 ma non per 3.
  - C) è divisibile per 3 ma non per 2.
  - D) non è divisibile né per 2 né per 3.
- Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.
9. Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinque che contengono i numeri 1 e 90.
10. Il valore dell'espressione  $\log_2 3 \cdot \log_3 2$  è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.