Sessione ordinaria 2006
Seconda prova scritta

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza λ viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.

a) Quale è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e di utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Una aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni *f* e *g* determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo in base *e*.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di *f* e *g* sono tra loro tangenti.
2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.
3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\dfrac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.
2. I poliedri regolari – noti anche come *solidi platonici* – sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?
3. Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di *50 cm*^{2}, margini superiore e inferiore di *4 cm* e margini laterali di *2 cm*. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?
4. La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?
5. Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in N$.
6. L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.
7. La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo $[0,1]$? Se si, trova il punto ξ che compare nella formula
$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$
8. La funzione $f(x) = tgx$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?
9. Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?
10. La funzione $f(x) = a\,\text{sen}\,x + b\cos x$ ha un estremo relativo per $x = \frac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino *a* e *b* e si dica quale è il periodo di $f(x)$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.