Unione Matematica Italiana
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

T1

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2017

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ____________________ COGNOME ______________________________ CLASSE __________

data di nascita: ____________ mail (facoltativa): ____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

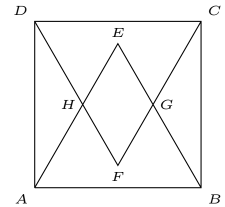
1. Quante sono le coppie di numeri interi positivi (m, n) tali che $m^n = 2^{24}$?
(A) 2 **(B)** 8 **(C)** 1 **(D)** 6 **(E)** 4

2. Sei anni fa, l'età di Anna era il quintuplo dell'età di suo figlio Mario. Adesso, invece, è il triplo dell'età di Mario. Tra quanti anni l'età di Anna sarà il doppio dell'età di Mario?
(A) 8 **(B)** 6 **(C)** 10 **(D)** 9 **(E)** 12

3. Con il simbolo $n!$ si indica il prodotto dei numeri interi positivi da 1 a n, ad esempio: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Consideriamo il numero $H = 1! + 2! + 3! + 4! + ... + 2016! + 2017!$ (una somma con 2017 addendi). Qual è la cifra delle decine di H?
(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 1 **(D)** 3 **(E)** 6

4. Attorno a un tavolo circolare sono sedute 6 persone, ciascuna delle quali può essere o un cavaliere (che dice sempre la verità) o un furfante (che mente sempre). Ognuno dei presenti afferma: "Considerando i miei due vicini e la persona che è seduta proprio di fronte a me, esattamente due di queste tre persone sono furfanti". Quanti sono, in tutto, i cavalieri seduti al tavolo?
(A) nessuno **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4
(E) gli elementi forniti non sono sufficienti per stabilirlo

5. Nella figura qui a fianco, $ABCD$ è un quadrato di lato pari a 2 cm ed i triangoli ABE e CDF sono equilateri. Quanti cm^2 misura l'area del quadrilatero $FGEH$?
(A) $\frac{8\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\frac{8\sqrt{3}}{3}-4$ **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ **(E)** $\frac{1}{2}$



6. Una bottiglia da 33 cl di una bibita all'arancia è costituita per il 75% da acqua e per il 25% da succo d'arancia. Enrica vuole sostituire un po' della bibita contenuta in questa bottiglia con del succo d'arancia, in modo da ottenere una nuova bibita che sia costituita per il 50% da succo d'arancia. Quanti cl della bibita iniziale Enrica deve sostituire con del succo d'arancia?
(A) 8,25 **(B)** 10 **(C)** 9, 75 **(D)** 12 **(E)** 11

7. Carlo scrive in una riga i numeri interi da 1 a 128 (inclusi). Poi inizia a cancellarne alcuni, in questo modo: cancella il numero 1, lascia il 2, cancella il 3, lascia il 4, etc. Arrivato in fondo alla riga, la ripercorre al contrario, cancellando il primo numero che trova tra quelli rimasti, lasciando poi il secondo, etc. Continua quindi a ripercorrere la riga alternativamente nei due sensi, cancellando ogni volta un numero sì e un numero no, fino a quando sulla lavagna resta un solo numero. Qual è quest'ultimo numero rimasto?
(A) 86 **(B)** 54 **(C)** 70 **(D)** 22 **(E)** 38

8. Quante sono le coppie di interi positivi (a, b), con $a < b$, tali che $MCD(a, b) = 2$ e $mcm(a, b) = 660$?
(A) 0 **(B)** 8 **(C)** 3 **(D)** 10 **(E)** 5

9. Sia LMN un triangolo e sia P un punto sul lato MN. Supponiamo che si abbia $\widehat{MLP} = \widehat{LNP}$ e $\widehat{NLP} = \widehat{LMP}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?
(A) $LN > LP$ **(B)** $MN \cdot LP > LM \cdot LN$ **(C)** $LP \leq \frac{MN}{2}$
(D) $LM < MN$ **(E)** $MP \cdot NP = LP^2$

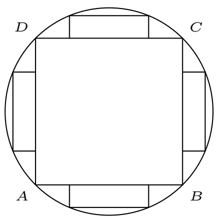
10. Alle $12:00:00$ le lancette delle ore e dei minuti di un orologio sono sovrapposte. Dopo quanti minuti, per la prima volta, esse saranno allineate ed opposte?
(A) circa 30 **(B)** circa 98 **(C)** circa 100 **(D)** circa 33 **(E)** circa 34

11. Silvia e Luigi si sfidano lanciando più volte un dado. Ogni volta che esce un numero pari fa un punto Silvia, quando esce un numero dispari fa un punto Luigi. Vince la partita chi arriva per primo a 5 punti. Dopo 5 lanci, Silvia è in vantaggio per 4 a 1. Qual è la probabilità che sia Silvia a vincere la partita?
(A) 4/5 **(B)** 5/6 **(C)** 7/8 **(D)** 3/4 **(E)** 15/16

12. L'area del triangolo ABC è pari a 60 m^2. Siano D, E i punti interni al lato AC tali che $AD = DE = EC$ e siano F, G, H i punti interni ad AB tali che $AF = FG = GH = HB$. Qual è l'area del triangolo DEG?
(A) 20 m^2 **(B)** 15 m^2 **(C)** 10 m^2 **(D)** 12 m^2 **(E)** 18 m^2

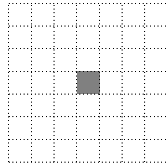
13. Per ciascun giocatore di scacchi ogni mese viene calcolato un punteggio, derivante dai suoi risultati e reso noto pubblicamente, che indica il suo livello di abilità in quel momento. Gerardo sta per iniziare un torneo di scacchi con 64 partecipanti, che si svolge ad eliminazione diretta (prima i 32imi di finale, poi i 16esimi, poi gli ottavi, etc.): chi vince una partita passa il turno, l'altro è eliminato (in caso di patta, si ripete la partita). La precedente edizione del torneo è stata molto avara di sorprese: in ogni partita ha sempre vinto il giocatore con punteggio più alto. Prima del sorteggio del tabellone (che avviene in modo casuale tra tutti i partecipanti), Gerardo si informa sugli altri giocatori presenti (che hanno tutti punteggi diversi) e conclude che, se tutto dovesse andare ancora come nella precedente edizione, egli potrebbe al massimo arrivare in semifinale. Se ne deduce che, tra i partecipanti al torneo, il punteggio di Gerardo...
(A) può trovarsi in qualsiasi posizione successiva alla 32^a
(B) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 32^a alla 48^a (incluse)
(C) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 50^a
(D) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 49^a
(E) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 34^a alla 49^a (incluse)

14. Un quadrato $ABCD$ di lato pari a 2 cm è inscritto in una circonferenza. Nei segmenti circolari delimitati dai lati del quadrato vengono inscritti 4 rettangoli. Quanti cm deve misurare ciascun lato di tali rettangoli, affinché essi siano dei quadrati?
(A) $\sqrt{2}/4$ **(B)** 1/3 **(C)** 3/8 **(D)** 2/5 **(E)** 1/4



15. Quanti sono i numeri primi tali che, se si cancella da essi un qualsiasi gruppo di cifre anche non consecutive (senza però cancellarle tutte) e si leggono le cifre rimanenti nell'ordine in cui si trovano, si ottiene ancora un numero primo?
(Si ricorda che 1 non è un numero primo.)
(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 3

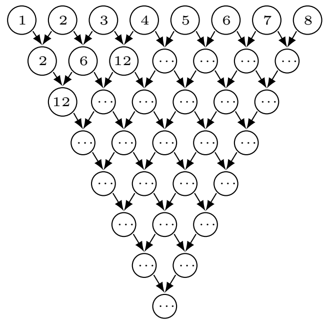
16. Presa una griglia 7×7, consideriamo i possibili quadrati (da 1×1 a 7×7) ottenuti dall'unione di una o più caselle della griglia. Quanti tra questi quadrati contengono la casella centrale della griglia?
(A) 50 **(B)** 30 **(C)** 44 **(D)** 42 **(E)** 28



17. Carolina inizia a scrivere tutti gli interi positivi pari, uno di seguito all'altro: 246810121416... Quale cifra occuperà la 2017^a posizione?
(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 1

18. In un polinomio di 5° grado $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, ciascuno dei coefficienti a, b, c, d, e, f è 1 oppure -1. Sapendo che si ha $p(2) = 11$, qual è il valore di $p(3)$?
(A) 178 **(B)** 244 **(C)** 126 **(D)** 142 **(E)** 196

19. Dopo aver disegnato uno schema triangolare come quello qui a fianco, Roberto scrive nei cerchi della riga più in alto i numeri interi da 1 a 8. Poi, dentro ciascuno degli altri cerchi, scrive il prodotto dei numeri contenuti nei due cerchi sopra di esso che sono ad esso collegati con una freccia (dunque ottiene 2, 6, 12, ... e così via). Con quanti zeri terminerà il numero che dovrà scrivere nel cerchio più in basso?
(A) 35 **(B)** 36 **(C)** 34 **(D)** 32 **(E)** 33



20. Dato un rettangolo $ABCD$, sia P un punto interno al lato CD. La retta AP interseca la retta BC nel punto T. Detto M il punto medio del lato BC, è noto che $\widehat{APM} = 2\,\widehat{ATC}$. Sapendo che l'area del triangolo CPT è di 10 cm^2, qual è l'area del rettangolo $ABCD$?
(A) 90 cm^2 **(B)** 120 cm^2 **(C)** 60 cm^2 **(D)** 80 cm^2 **(E)** 160 cm^2

Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca

T2

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2017

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ____________________ COGNOME _______________________________ CLASSE __________

data di nascita: ____________ mail (facoltativa): ____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Sei anni fa, l'età di Anna era il quintuplo dell'età di suo figlio Mario. Adesso, invece, è il triplo dell'età di Mario. Tra quanti anni l'età di Anna sarà il doppio dell'età di Mario?
(A) 8 **(B)** 6 **(C)** 10 **(D)** 9 **(E)** 12

2. Con il simbolo $n!$ si indica il prodotto dei numeri interi positivi da 1 a n, ad esempio: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Consideriamo il numero $H = 1! + 2! + 3! + 4! + ... + 2016! + 2017!$ (una somma con 2017 addendi). Qual è la cifra delle decine di H?
(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 1 **(D)** 3 **(E)** 6

3. Attorno a un tavolo circolare sono sedute 6 persone, ciascuna delle quali può essere o un cavaliere (che dice sempre la verità) o un furfante (che mente sempre). Ognuno dei presenti afferma: "Considerando i miei due vicini e la persona che è seduta proprio di fronte a me, esattamente due di queste tre persone sono furfanti". Quanti sono, in tutto, i cavalieri seduti al tavolo?
(A) nessuno **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4
(E) gli elementi forniti non sono sufficienti per stabilirlo

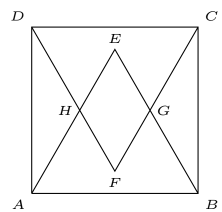
4. Quante sono le coppie di numeri interi positivi (m, n) tali che $m^n = 2^{24}$?
(A) 2 **(B)** 8 **(C)** 1 **(D)** 6 **(E)** 4

5. Una bottiglia da 33 cl di una bibita all'arancia è costituita per il 75% da acqua e per il 25% da succo d'arancia. Enrica vuole sostituire un po' della bibita contenuta in questa bottiglia con del succo d'arancia, in modo da ottenere una nuova bibita che sia costituita per il 50% da succo d'arancia. Quanti cl della bibita iniziale Enrica deve sostituire con del succo d'arancia?
(A) 8,25 **(B)** 10 **(C)** $9,75$ **(D)** 12 **(E)** 11

6. Carlo scrive in una riga i numeri interi da 1 a 128 (inclusi). Poi inizia a cancellarne alcuni, in questo modo: cancella il numero 1, lascia il 2, cancella il 3, lascia il 4, etc. Arrivato in fondo alla riga, la ripercorre al contrario, cancellando il primo numero che trova tra quelli rimasti, lasciando poi il secondo, etc. Continua quindi a ripercorrere la riga alternativamente nei due sensi, cancellando ogni volta un numero sì e un numero no, fino a quando sulla lavagna resta un solo numero. Qual è quest'ultimo numero rimasto?
(A) 86 **(B)** 54 **(C)** 70 **(D)** 22 **(E)** 38

7. Quante sono le coppie di interi positivi (a, b), con $a < b$, tali che $MCD(a, b) = 2$ e $mcm(a, b) = 660$?
(A) 0 **(B)** 8 **(C)** 3 **(D)** 10 **(E)** 5

8. Nella figura qui a fianco, $ABCD$ è un quadrato di lato pari a 2 cm ed i triangoli ABE e CDF sono equilateri. Quanti cm^2 misura l'area del quadrilatero $FGEH$?
(A) $\frac{8\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\frac{8\sqrt{3}}{3}-4$ **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ **(E)** $\frac{1}{2}$



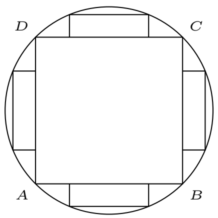
9. Silvia e Luigi si sfidano lanciando più volte un dado. Ogni volta che esce un numero pari fa un punto Silvia, quando esce un numero dispari fa un punto Luigi. Vince la partita chi arriva per primo a 5 punti. Dopo 5 lanci, Silvia è in vantaggio per 4 a 1. Qual è la probabilità che sia Silvia a vincere la partita?
(A) 4/5 **(B)** 5/6 **(C)** 7/8 **(D)** 3/4 **(E)** 15/16

10. Alle 12 : 00 : 00 le lancette delle ore e dei minuti di un orologio sono sovrapposte. Dopo quanti minuti, per la prima volta, esse saranno allineate ed opposte?
(A) circa 30 **(B)** circa 98 **(C)** circa 100 **(D)** circa 33 **(E)** circa 34

11. L'area del triangolo ABC è pari a 60 m^2. Siano D, E i punti interni al lato AC tali che $AD = DE = EC$ e siano F, G, H i punti interni ad AB tali che $AF = FG = GH = HB$. Qual è l'area del triangolo DEG?
(A) 20 m^2 **(B)** 15 m^2 **(C)** 10 m^2 **(D)** 12 m^2 **(E)** 18 m^2

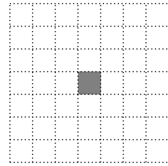
12. Sia LMN un triangolo e sia P un punto sul lato MN. Supponiamo che si abbia $\widehat{MLP} = \widehat{LNP}$ e $\widehat{NLP} = \widehat{LMP}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?
(A) $LN > LP$ **(B)** $MN \cdot LP > LM \cdot LN$ **(C)** $LP \leq \frac{MN}{2}$
(D) $LM < MN$ **(E)** $MP \cdot NP = LP^2$

13. Un quadrato $ABCD$ di lato pari a 2 cm è inscritto in una circonferenza. Nei segmenti circolari delimitati dai lati del quadrato vengono inscritti 4 rettangoli. Quanti cm deve misurare ciascun lato di tali rettangoli, affinché essi siano dei quadrati?
(A) $\sqrt{2}/4$ **(B)** 1/3 **(C)** 3/8 **(D)** 2/5 **(E)** 1/4



14. Per ciascun giocatore di scacchi ogni mese viene calcolato un punteggio, derivante dai suoi risultati e reso noto pubblicamente, che indica il suo livello di abilità in quel momento. Gerardo sta per iniziare un torneo di scacchi con 64 partecipanti, che si svolge ad eliminazione diretta (prima i 32imi di finale, poi i 16esimi, poi gli ottavi, etc.): chi vince una partita passa il turno, l'altro è eliminato (in caso di patta, si ripete la partita). La precedente edizione del torneo è stata molto avara di sorprese: in ogni partita ha sempre vinto il giocatore con punteggio più alto. Prima del sorteggio del tabellone (che avviene in modo casuale tra tutti i partecipanti), Gerardo si informa sugli altri giocatori presenti (che hanno tutti punteggi diversi) e conclude che, se tutto dovesse andare ancora come nella precedente edizione, egli potrebbe al massimo arrivare in semifinale. Se ne deduce che, tra i partecipanti al torneo, il punteggio di Gerardo...
(A) può trovarsi in qualsiasi posizione successiva alla 32^a
(B) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 32^a alla 48^a (incluse)
(C) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 50^a
(D) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 49^a
(E) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 34^a alla 49^a (incluse)

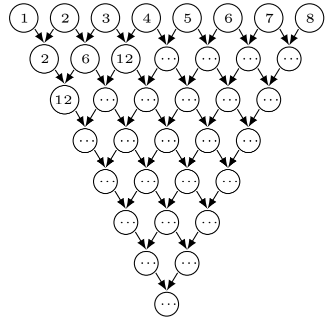
15. Presa una griglia 7×7, consideriamo i possibili quadrati (da 1×1 a 7×7) ottenuti dall'unione di una o più caselle della griglia. Quanti tra questi quadrati contengono la casella centrale della griglia?
(A) 50 **(B)** 30 **(C)** 44 **(D)** 42 **(E)** 28



16. Quanti sono i numeri primi tali che, se si cancella da essi un qualsiasi gruppo di cifre anche non consecutive (senza però cancellarle tutte) e si leggono le cifre rimanenti nell'ordine in cui si trovano, si ottiene ancora un numero primo? (Si ricorda che 1 non è un numero primo.)
(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 3

17. Dato un rettangolo $ABCD$, sia P un punto interno al lato CD. La retta AP interseca la retta BC nel punto T. Detto M il punto medio del lato BC, è noto che $\widehat{APM} = 2\,\widehat{ATC}$. Sapendo che l'area del triangolo CPT è di 10 cm^2, qual è l'area del rettangolo $ABCD$?
(A) 90 cm^2 **(B)** 120 cm^2 **(C)** 60 cm^2 **(D)** 80 cm^2 **(E)** 160 cm^2

18. Dopo aver disegnato uno schema triangolare come quello qui a fianco, Roberto scrive nei cerchi della riga più in alto i numeri interi da 1 a 8. Poi, dentro ciascuno degli altri cerchi, scrive il prodotto dei numeri contenuti nei due cerchi sopra di esso che sono ad esso collegati con una freccia (dunque ottiene 2, 6, 12, ... e così via). Con quanti zeri terminerà il numero che dovrà scrivere nel cerchio più in basso?
(A) 35 **(B)** 36 **(C)** 34 **(D)** 32 **(E)** 33



19. In un polinomio di 5° grado $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, ciascuno dei coefficienti a, b, c, d, e, f è 1 oppure -1. Sapendo che si ha $p(2) = 11$, qual è il valore di $p(3)$?
(A) 178 **(B)** 244 **(C)** 126 **(D)** 142 **(E)** 196

20. Carolina inizia a scrivere tutti gli interi positivi pari, uno di seguito all'altro: 246810121416... Quale cifra occuperà la 2017^a posizione?
(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 1

Unione Matematica Italiana
PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

T3

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2017

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ____________________ COGNOME ________________________________ CLASSE __________

data di nascita: ____________ mail (facoltativa): ____

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Con il simbolo $n!$ si indica il prodotto dei numeri interi positivi da 1 a n, ad esempio: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Consideriamo il numero $H = 1! + 2! + 3! + 4! + ... + 2016! + 2017!$ (una somma con 2017 addendi). Qual è la cifra delle decine di H?
(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 1 **(D)** 3 **(E)** 6

2. Sei anni fa, l'età di Anna era il quintuplo dell'età di suo figlio Mario. Adesso, invece, è il triplo dell'età di Mario. Tra quanti anni l'età di Anna sarà il doppio dell'età di Mario?
(A) 8 **(B)** 6 **(C)** 10 **(D)** 9 **(E)** 12

3. Quante sono le coppie di numeri interi positivi (m, n) tali che $m^n = 2^{24}$?
(A) 2 **(B)** 8 **(C)** 1 **(D)** 6 **(E)** 4

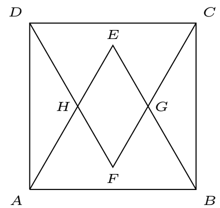
4. Attorno a un tavolo circolare sono sedute 6 persone, ciascuna delle quali può essere o un cavaliere (che dice sempre la verità) o un furfante (che mente sempre). Ognuno dei presenti afferma: "Considerando i miei due vicini e la persona che è seduta proprio di fronte a me, esattamente due di queste tre persone sono furfanti". Quanti sono, in tutto, i cavalieri seduti al tavolo?
(A) nessuno **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4
(E) gli elementi forniti non sono sufficienti per stabilirlo

5. Carlo scrive in una riga i numeri interi da 1 a 128 (inclusi). Poi inizia a cancellarne alcuni, in questo modo: cancella il numero 1, lascia il 2, cancella il 3, lascia il 4, etc. Arrivato in fondo alla riga, la ripercorre al contrario, cancellando il primo numero che trova tra quelli rimasti, lasciando poi il secondo, etc. Continua quindi a ripercorrere la riga alternativamente nei due sensi, cancellando ogni volta un numero sì e un numero no, fino a quando sulla lavagna resta un solo numero. Qual è quest'ultimo numero rimasto?
(A) 86 **(B)** 54 **(C)** 70 **(D)** 22 **(E)** 38

6. Quante sono le coppie di interi positivi (a, b), con $a < b$, tali che $MCD(a, b) = 2$ e $mcm(a, b) = 660$?
(A) 0 **(B)** 8 **(C)** 3 **(D)** 10 **(E)** 5

7. Una bottiglia da 33 cl di una bibita all'arancia è costituita per il 75% da acqua e per il 25% da succo d'arancia. Enrica vuole sostituire un po' della bibita contenuta in questa bottiglia con del succo d'arancia, in modo da ottenere una nuova bibita che sia costituita per il 50% da succo d'arancia. Quanti cl della bibita iniziale Enrica deve sostituire con del succo d'arancia?
(A) 8,25 **(B)** 10 **(C)** 9,75 **(D)** 12 **(E)** 11

8. Nella figura qui a fianco, $ABCD$ è un quadrato di lato pari a 2 cm ed i triangoli ABE e CDF sono equilateri. Quanti cm^2 misura l'area del quadrilatero $FGEH$?
(A) $\frac{8\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\frac{8\sqrt{3}}{3}-4$ **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ **(E)** $\frac{1}{2}$



9. Alle 12 : 00 : 00 le lancette delle ore e dei minuti di un orologio sono sovrapposte. Dopo quanti minuti, per la prima volta, esse saranno allineate ed opposte?
(A) circa 30 **(B)** circa 98 **(C)** circa 100 **(D)** circa 33 **(E)** circa 34

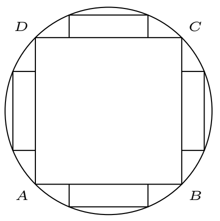
10. Sia LMN un triangolo e sia P un punto sul lato MN. Supponiamo che si abbia $\widehat{MLP} = \widehat{LNP}$ e $\widehat{NLP} = \widehat{LMP}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?
(A) $LN > LP$ **(B)** $MN \cdot LP > LM \cdot LN$ **(C)** $LP \leq \frac{MN}{2}$
(D) $LM < MN$ **(E)** $MP \cdot NP = LP^2$

11. L'area del triangolo ABC è pari a 60 m^2. Siano D, E i punti interni al lato AC tali che $AD = DE = EC$ e siano F, G, H i punti interni ad AB tali che $AF = FG = GH = HB$. Qual è l'area del triangolo DEG?
(A) 20 m^2 **(B)** 15 m^2 **(C)** 10 m^2 **(D)** 12 m^2 **(E)** 18 m^2

12. Silvia e Luigi si sfidano lanciando più volte un dado. Ogni volta che esce un numero pari fa un punto Silvia, quando esce un numero dispari fa un punto Luigi. Vince la partita chi arriva per primo a 5 punti. Dopo 5 lanci, Silvia è in vantaggio per 4 a 1. Qual è la probabilità che sia Silvia a vincere la partita?
(A) 4/5 **(B)** 5/6 **(C)** 7/8 **(D)** 3/4 **(E)** 15/16

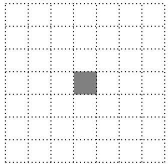
13. Quanti sono i numeri primi tali che, se si cancella da essi un qualsiasi gruppo di cifre anche non consecutive (senza però cancellarle tutte) e si leggono le cifre rimanenti nell'ordine in cui si trovano, si ottiene ancora un numero primo?
(Si ricorda che 1 non è un numero primo.)
(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 3

14. Un quadrato $ABCD$ di lato pari a 2 cm è inscritto in una circonferenza. Nei segmenti circolari delimitati dai lati del quadrato vengono inscritti 4 rettangoli. Quanti cm deve misurare ciascun lato di tali rettangoli, affinché essi siano dei quadrati?
(A) $\sqrt{2}/4$ **(B)** 1/3 **(C)** 3/8 **(D)** 2/5 **(E)** 1/4



15. Per ciascun giocatore di scacchi ogni mese viene calcolato un punteggio, derivante dai suoi risultati e reso noto pubblicamente, che indica il suo livello di abilità in quel momento. Gerardo sta per iniziare un torneo di scacchi con 64 partecipanti, che si svolge ad eliminazione diretta (prima i 32imi di finale, poi i 16esimi, poi gli ottavi, etc.): chi vince una partita passa il turno, l'altro è eliminato (in caso di patta, si ripete la partita). La precedente edizione del torneo è stata molto avara di sorprese: in ogni partita ha sempre vinto il giocatore con punteggio più alto. Prima del sorteggio del tabellone (che avviene in modo casuale tra tutti i partecipanti), Gerardo si informa sugli altri giocatori presenti (che hanno tutti punteggi diversi) e conclude che, se tutto dovesse andare ancora come nella precedente edizione, egli potrebbe al massimo arrivare in semifinale. Se ne deduce che, tra i partecipanti al torneo, il punteggio di Gerardo...
(A) può trovarsi in qualsiasi posizione successiva alla 32^a
(B) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 32^a alla 48^a (incluse)
(C) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 50^a
(D) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 49^a
(E) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 34^a alla 49^a (incluse)

16. Presa una griglia 7×7, consideriamo i possibili quadrati (da 1×1 a 7×7) ottenuti dall'unione di una o più caselle della griglia. Quanti tra questi quadrati contengono la casella centrale della griglia?
(A) 50 **(B)** 30 **(C)** 44 **(D)** 42 **(E)** 28

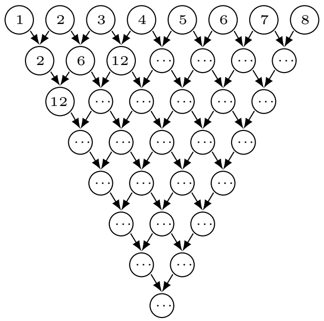


17. In un polinomio di 5° grado $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, ciascuno dei coefficienti a, b, c, d, e, f è 1 oppure -1. Sapendo che si ha $p(2) = 11$, qual è il valore di $p(3)$?
(A) 178 **(B)** 244 **(C)** 126 **(D)** 142 **(E)** 196

18. Carolina inizia a scrivere tutti gli interi positivi pari, uno di seguito all'altro: 246810121416... Quale cifra occuperà la 2017^a posizione?
(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 1

19. Dato un rettangolo $ABCD$, sia P un punto interno al lato CD. La retta AP interseca la retta BC nel punto T. Detto M il punto medio del lato BC, è noto che $\widehat{APM} = 2\,\widehat{ATC}$. Sapendo che l'area del triangolo CPT è di 10 cm^2, qual è l'area del rettangolo $ABCD$?
(A) 90 cm^2 **(B)** 120 cm^2 **(C)** 60 cm^2 **(D)** 80 cm^2 **(E)** 160 cm^2

20. Dopo aver disegnato uno schema triangolare come quello qui a fianco, Roberto scrive nei cerchi della riga più in alto i numeri interi da 1 a 8. Poi, dentro ciascuno degli altri cerchi, scrive il prodotto dei numeri contenuti nei due cerchi sopra di esso che sono ad esso collegati con una freccia (dunque ottiene 2, 6, 12, ... e così via). Con quanti zeri terminerà il numero che dovrà scrivere nel cerchio più in basso?
(A) 35 **(B)** 36 **(C)** 34 **(D)** 32 **(E)** 33



Unione Matematica Italiana

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA

Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca

T4

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

23 novembre 2017

- *La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere* **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(D)**, **(E)**. *Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.*
- *Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.*
- *Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.*

Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.
Buon lavoro e buon divertimento!

NOME ____________ COGNOME ____________________ CLASSE ______

data di nascita: ________ mail (facoltativa): ____________________________

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

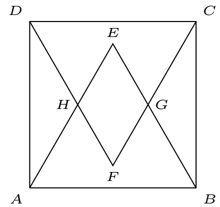
1. Attorno a un tavolo circolare sono sedute 6 persone, ciascuna delle quali può essere o un cavaliere (che dice sempre la verità) o un furfante (che mente sempre). Ognuno dei presenti afferma: "Considerando i miei due vicini e la persona che è seduta proprio di fronte a me, esattamente due di queste tre persone sono furfanti". Quanti sono, in tutto, i cavalieri seduti al tavolo?
(A) nessuno **(B)** 1 **(C)** 3 **(D)** 4
(E) gli elementi forniti non sono sufficienti per stabilirlo

2. Con il simbolo $n!$ si indica il prodotto dei numeri interi positivi da 1 a n, ad esempio: $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$. Consideriamo il numero $H = 1! + 2! + 3! + 4! + ... + 2016! + 2017!$ (una somma con 2017 addendi). Qual è la cifra delle decine di H?
(A) 5 **(B)** 7 **(C)** 1 **(D)** 3 **(E)** 6

3. Sei anni fa, l'età di Anna era il quintuplo dell'età di suo figlio Mario. Adesso, invece, è il triplo dell'età di Mario. Tra quanti anni l'età di Anna sarà il doppio dell'età di Mario?
(A) 8 **(B)** 6 **(C)** 10 **(D)** 9 **(E)** 12

4. Quante sono le coppie di numeri interi positivi (m, n) tali che $m^n = 2^{24}$?
(A) 2 **(B)** 8 **(C)** 1 **(D)** 6 **(E)** 4

5. Una bottiglia da 33 cl di una bibita all'arancia è costituita per il 75% da acqua e per il 25% da succo d'arancia. Enrica vuole sostituire un po' della bibita contenuta in questa bottiglia con del succo d'arancia, in modo da ottenere una nuova bibita che sia costituita per il 50% da succo d'arancia. Quanti cl della bibita iniziale Enrica deve sostituire con del succo d'arancia?
(A) 8,25 **(B)** 10 **(C)** $9,75$ **(D)** 12 **(E)** 11



6. Nella figura qui a fianco, $ABCD$ è un quadrato di lato pari a 2 cm ed i triangoli ABE e CDF sono equilateri. Quanti cm^2 misura l'area del quadrilatero $FGEH$?
(A) $\frac{8\sqrt{3}}{4}$ **(B)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(C)** $\frac{8\sqrt{3}}{3}-4$ **(D)** $\frac{2\sqrt{3}}{3}-1$ **(E)** $\frac{1}{2}$

7. Quante sono le coppie di interi positivi (a, b), con $a < b$, tali che $MCD(a, b) = 2$ e $mcm(a, b) = 660$?
(A) 0 **(B)** 8 **(C)** 3 **(D)** 10 **(E)** 5

8. Carlo scrive in una riga i numeri interi da 1 a 128 (inclusi). Poi inizia a cancellarne alcuni, in questo modo: cancella il numero 1, lascia il 2, cancella il 3, lascia il 4, etc. Arrivato in fondo alla riga, la ripercorre al contrario, cancellando il primo numero che trova tra quelli rimasti, lasciando poi il secondo, etc. Continua quindi a ripercorrere la riga alternativamente nei due sensi, cancellando ogni volta un numero sì e un numero no, fino a quando sulla lavagna resta un solo numero. Qual è quest'ultimo numero rimasto?
(A) 86 **(B)** 54 **(C)** 70 **(D)** 22 **(E)** 38

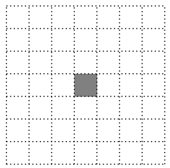
9. Sia LMN un triangolo e sia P un punto sul lato MN. Supponiamo che si abbia $\widehat{MLP} = \widehat{LNP}$ e $\widehat{NLP} = \widehat{LMP}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?
(A) $LN > LP$ **(B)** $MN \cdot LP > LM \cdot LN$ **(C)** $LP \leq \frac{MN}{2}$
(D) $LM < MN$ **(E)** $MP \cdot NP = LP^2$

10. L'area del triangolo ABC è pari a 60 m^2. Siano D, E i punti interni al lato AC tali che $AD = DE = EC$ e siano F, G, H i punti interni ad AB tali che $AF = FG = GH = HB$. Qual è l'area del triangolo DEG?
(A) 20 m^2 **(B)** 15 m^2 **(C)** 10 m^2 **(D)** 12 m^2 **(E)** 18 m^2

11. Silvia e Luigi si sfidano lanciando più volte un dado. Ogni volta che esce un numero pari fa un punto Silvia, quando esce un numero dispari fa un punto Luigi. Vince la partita chi arriva per primo a 5 punti. Dopo 5 lanci, Silvia è in vantaggio per 4 a 1. Qual è la probabilità che sia Silvia a vincere la partita?
(A) 4/5 **(B)** 5/6 **(C)** 7/8 **(D)** 3/4 **(E)** 15/16

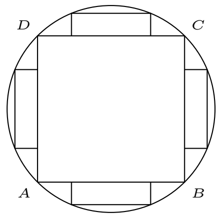
12. Alle $12:00:00$ le lancette delle ore e dei minuti di un orologio sono sovrapposte. Dopo quanti minuti, per la prima volta, esse saranno allineate ed opposte?
(A) circa 30 **(B)** circa 98 **(C)** circa 100 **(D)** circa 33 **(E)** circa 34

13. Presa una griglia 7×7, consideriamo i possibili quadrati (da 1×1 a 7×7) ottenuti dall'unione di una o più caselle della griglia. Quanti tra questi quadrati contengono la casella centrale della griglia?
(A) 50 **(B)** 30 **(C)** 44 **(D)** 42 **(E)** 28

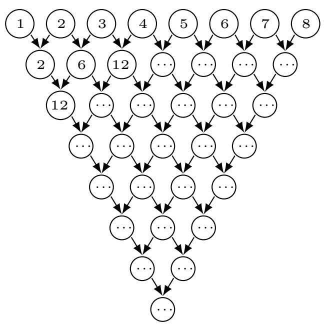


14. Quanti sono i numeri primi tali che, se si cancella da essi un qualsiasi gruppo di cifre anche non consecutive (senza però cancellarle tutte) e si leggono le cifre rimanenti nell'ordine in cui si trovano, si ottiene ancora un numero primo? (Si ricorda che 1 non è un numero primo.)
(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 5 **(D)** 7 **(E)** 3

15. Un quadrato $ABCD$ di lato pari a 2 cm è inscritto in una circonferenza. Nei segmenti circolari delimitati dai lati del quadrato vengono inscritti 4 rettangoli. Quanti cm deve misurare ciascun lato di tali rettangoli, affinché essi siano dei quadrati?
(A) $\sqrt{2}/4$ **(B)** 1/3 **(C)** 3/8 **(D)** 2/5 **(E)** 1/4



16. Dopo aver disegnato uno schema triangolare come quello qui a fianco, Roberto scrive nei cerchi della riga più in alto i numeri interi da 1 a 8. Poi, dentro ciascuno degli altri cerchi, scrive il prodotto dei numeri contenuti nei due cerchi sopra di esso che sono ad esso collegati con una freccia (dunque ottiene 2, 6, 12, ... e così via). Con quanti zeri terminerà il numero che dovrà scrivere nel cerchio più in basso?
(A) 35 **(B)** 36 **(C)** 34 **(D)** 32 **(E)** 33



17. Per ciascun giocatore di scacchi ogni mese viene calcolato un punteggio, derivante dai suoi risultati e reso noto pubblicamente, che indica il suo livello di abilità in quel momento. Gerardo sta per iniziare un torneo di scacchi con 64 partecipanti, che si svolge ad eliminazione diretta (prima i 32imi di finale, poi i 16esimi, poi gli ottavi, etc.): chi vince una partita passa il turno, l'altro è eliminato (in caso di patta, si ripete la partita). La precedente edizione del torneo è stata molto avara di sorprese: in ogni partita ha sempre vinto il giocatore con punteggio più alto. Prima del sorteggio del tabellone (che avviene in modo casuale tra tutti i partecipanti), Gerardo si informa sugli altri giocatori presenti (che hanno tutti punteggi diversi) e conclude che, se tutto dovesse andare ancora come nella precedente edizione, egli potrebbe al massimo arrivare in semifinale. Se ne deduce che, tra i partecipanti al torneo, il punteggio di Gerardo...
(A) può trovarsi in qualsiasi posizione successiva alla 32^a
(B) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 32^a alla 48^a (incluse)
(C) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 50^a
(D) può trovarsi in qualsiasi posizione precedente alla 49^a
(E) può trovarsi in qualsiasi posizione dalla 34^a alla 49^a (incluse)

18. Dato un rettangolo $ABCD$, sia P un punto interno al lato CD. La retta AP interseca la retta BC nel punto T. Detto M il punto medio del lato BC, è noto che $\widehat{APM} = 2\,\widehat{ATC}$. Sapendo che l'area del triangolo CPT è di 10 cm^2, qual è l'area del rettangolo $ABCD$?
(A) 90 cm^2 **(B)** 120 cm^2 **(C)** 60 cm^2 **(D)** 80 cm^2 **(E)** 160 cm^2

19. Carolina inizia a scrivere tutti gli interi positivi pari, uno di seguito all'altro: 246810121416... Quale cifra occuperà la 2017^a posizione?
(A) 8 **(B)** 7 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 1

20. In un polinomio di 5° grado $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, ciascuno dei coefficienti a, b, c, d, e, f è 1 oppure -1. Sapendo che si ha $p(2) = 11$, qual è il valore di $p(3)$?
(A) 178 **(B)** 244 **(C)** 126 **(D)** 142 **(E)** 196