



UNIONE MATEMATICA ITALIANA  
**PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE,  
 DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA



T1

*I Giochi di Archimede - Gara Triennio*

22 novembre 2018

- La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E). Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.
- Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.
- Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.

**Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.**  
 Buon lavoro e buon divertimento!

NOME \_\_\_\_\_ COGNOME \_\_\_\_\_ CLASSE \_\_\_\_\_

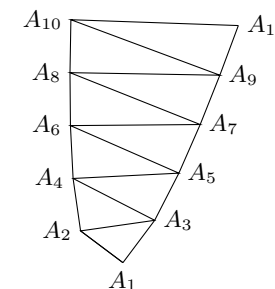
data di nascita: \_\_\_\_\_ mail (facoltativa): \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

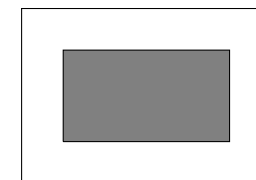
- Indicare la più grande tra queste frazioni.  
 (A)  $\frac{2018}{2011}$     (B)  $\frac{2016}{2009}$     (C)  $\frac{2020}{2013}$     (D)  $\frac{2019}{2012}$     (E)  $\frac{2025}{2018}$
- Sia Luca che Claudia hanno in mano due carte rosse e due nere. Claudia pesca una carta a caso dalla mano di Luca e l'aggiunge alle proprie. A questo punto, Luca pesca una carta dalla mano di Claudia. Qual è la probabilità che ciascuno dei due venga a trovarsi con due carte rosse e due carte nere?  
 (A)  $\frac{2}{3}$     (B)  $\frac{2}{5}$     (C)  $\frac{3}{5}$     (D)  $\frac{3}{4}$     (E)  $\frac{1}{2}$
- Piero costruisce un cubo incollando 1000 piccoli cubetti tutti uguali (con 10 cubetti lungo ogni spigolo). Dipinge quindi di verde tutte le facce del cubo che ha costruito. Quanti dei cubetti iniziali avranno almeno una faccia colorata di verde?  
 (A) 600    (B) 384    (C) 504    (D) 488    (E) 592

- Quale dei seguenti numeri si può ottenere sommando i quadrati di due numeri interi multipli di 3?  
 (A) 459    (B) 363    (C) 633    (D) 495    (E) 549
- Un cellulare con la batteria del tutto scarica deve rimanere in carica 2 ore per ricaricarsi completamente, se nel frattempo non è in uso. Se invece è utilizzato durante la ricarica, il 40% dell'energia introdotta viene subito consumata e solo la parte restante si accumula nella batteria. Sapendo che, per ricaricare la batteria da zero, sono servite 2 ore e mezza, stabilire per quanti minuti il cellulare è stato utilizzato durante la ricarica (si suppone, che si usi o meno il telefono, che l'energia immagazzinata in un intervallo di tempo sia proporzionale alla sua durata).  
 (A) 72    (B) 90    (C) 60    (D) 87    (E) 75

- Teodoro sta costruendo una sequenza di triangoli rettangoli, disposti come qui a lato. Il primo è il triangolo isoscele  $A_1A_2A_3$ , rettangolo in  $A_1$ , con cateti di 1 cm. Il secondo è  $A_2A_3A_4$ , rettangolo in  $A_2$ , dove  $A_2A_4$  è ancora di 1 cm. Il terzo è  $A_3A_4A_5$ , rettangolo in  $A_3$ , con  $A_3A_5$  ancora di 1 cm. La costruzione va avanti così: in ciascun triangolo  $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ , rettangolo in  $A_n$ , il cateto  $A_nA_{n+2}$  è sempre di 1 cm. Quanti cm misurerà il segmento  $A_{900}A_{901}$ ?  
 (A) 60    (B) 300    (C) 30    (D) 45    (E) 150

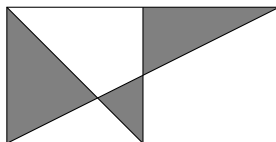


- Per prepararsi ai Giochi di Archimede, Costanza sta cercando di risolvere una raccolta di quesiti tratti dalle gare degli anni passati. Ne lascia in bianco 14 e risponde correttamente a  $\frac{2}{3}$  dei rimanenti (le altre risposte sono invece sbagliate). Si accorge quindi che, calcolando i punteggi come si fa nei Giochi di Archimede, ha così realizzato un punto in meno di quanto avrebbe ottenuto rispondendo a tutte le domande e sbagliandone precisamente la metà. Circa il numero di quesiti della raccolta, si può concludere che esso è...  
 (A) minore di 30    (B) fra 30 e 33 (inclusi)    (C) fra 34 e 36 (inclusi)  
 (D) fra 37 e 40 (inclusi)    (E) maggiore di 40
- Scrivendo per esteso il numero intero  $(10^{2018} + 2018)^2$  si utilizzano 4037 cifre. Qual è la somma di tutte queste cifre?  
 (A) 36    (B) 31    (C) 42    (D) 51    (E) 43
- Il lato maggiore della cornice di un quadro è  $\frac{8}{5}$  del minore. La cornice ha lo stesso spessore su tutti e quattro i lati. Nel quadro all'interno della cornice (rappresentato con un rettangolo grigio), il lato maggiore è doppio del lato minore. Qual è il rapporto tra l'area del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cornice e l'area del quadro all'interno della cornice?  
 (A)  $\frac{7}{3}$     (B)  $\frac{20}{9}$     (C)  $\frac{8}{5}$     (D)  $\frac{12}{5}$     (E)  $\frac{64}{25}$



10. Un pasticcere ha in negozio confetti di 12 gusti diversi e vuole confezionare bomboniere contenenti ciascuna 3 confetti, non necessariamente di gusti differenti. Quante bomboniere diverse può realizzare al massimo? (due bomboniere sono da considerare uguali se contengono confetti degli stessi gusti e nelle stesse quantità)
- (A) 364 (B) 320 (C) 324 (D) 360 (E) 348

11. Nella figura qui a fianco, è rappresentato un rettangolo diviso in due quadrati uguali. Il lato di ciascuno dei due quadrati è pari a 6 cm. Di quanti  $\text{cm}^2$  è l'area complessiva della regione ombreggiata?



- (A) 33 (B) 30 (C) 24 (D) 27 (E) 21
12. Anna ha riscritto per tre volte di fila un numero intero di due cifre, ottenendo così un numero  $S$  di sei cifre. Il numero  $S$  è sicuramente divisibile per...
- (A) 1111 (B) 101 (C) 11 (D) 111 (E) 1001

13. La circonferenza  $\beta$  ha centro nel punto  $B$  e raggio 40. Le circonferenze  $\alpha$  e  $\gamma$ , di centri rispettivamente  $A$  e  $C$ , hanno lo stesso raggio  $r$  e sono entrambe tangenti esternamente a  $\beta$ . I tre centri  $A, B, C$  sono allineati. Sapendo che le rette passanti per  $A$  e tangenti a  $\beta$  sono tangenti anche a  $\gamma$ , che cosa si può affermare a proposito del raggio  $r$ ?

- (A)  $r < 72$  (B)  $72 \leq r < 75$  (C)  $75 \leq r < 78$   
 (D)  $78 \leq r < 81$  (E)  $r \geq 81$

14. Tre ragazzi e due ragazze debbono sedersi attorno a un tavolo con sei sedie, numerate da 1 a 6. Per decidere il proprio posto, ciascuno dei cinque estrae a sorte uno tra sei foglietti (numerati da 1 a 6). Qual è la probabilità che la sedia che rimane vuota venga a trovarsi tra un ragazzo e una ragazza?

- (A)  $2/5$  (B)  $1/2$  (C)  $3/5$  (D)  $1/3$  (E)  $3/4$

15. Giulia scrive i numeri interi positivi in una griglia con 7 colonne, come mostrato in figura. Poiché ha in antipatia il numero 11, nel suo elenco mancano tutti i multipli di 11. Indichiamo con  $(m; n)$  la casella che si trova nella riga numero  $m$  (contando dall'alto) e nella colonna numero  $n$  (contando da sinistra): ad esempio, la casella  $(2; 4)$  contiene il numero 12. In quale casella sarà contenuto il numero 2018?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	23
24	25	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

- (A) (289; 2) (B) (263; 1) (C) (278; 5)  
 (D) (262; 4) (E) (288; 2)

16. Nel triangolo isoscele  $ABC$ , dove  $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$  cm e  $\overline{BC} = 8$  cm, la mediana uscente dal vertice  $B$  e la bisettrice uscente dal vertice  $C$  si intersecano nel punto  $D$ . Di quanti  $\text{cm}^2$  è l'area del triangolo  $BCD$ ?

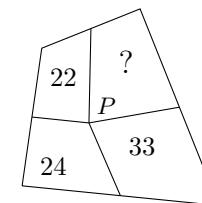
- (A)  $\frac{32}{7}$  (B)  $\frac{21}{5}$  (C)  $\frac{17}{4}$  (D) 4 (E)  $\frac{14}{3}$

17. Si consideri l'equazione  $ax^2 - bx + a = 0$  nell'incognita  $x$ , dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali positivi. Tra le seguenti 5 affermazioni, quante sono quelle vere?

- Se  $b > 2a$ , ci sono due soluzioni reali distinte.
- Se ci sono due soluzioni reali distinte, esse sono positive.
- Se una delle soluzioni è 9 volte l'altra, allora  $b > 3a$ .
- Qualunque siano  $a$  e  $b$ , non possono esserci due soluzioni intere distinte.
- Se ci sono due soluzioni reali, il loro prodotto è 1.

- (A) solo 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) tutte e 5

18. Da un punto  $P$  all'interno di un quadrilatero convesso, si tracciano i segmenti che lo congiungono ai punti medi dei lati. In questo modo, il quadrilatero viene suddiviso in quattro regioni. Nella figura sono indicate le aree di tre di queste regioni. Qual è l'area della quarta?



- (A) 32 (B) 30 (C) 27 (D) 31 (E) 29

19. Giovanna ha disposto 9 monetine in fila. Alcune mostrano la faccia con la testa, altre quella con la croce, in questa sequenza: CCTTCTTCC. Fa questo gioco: ad ogni mossa, sceglie due monete consecutive e le capovolge entrambe. Giovanna, con alcune mosse di questo tipo, vorrebbe ottenere una fila di monete disposte nella sequenza TCTCTCTCT. Che cosa si può concludere?

- (A) Non ci può riuscire.  
 (B) Ci può riuscire con un minimo di 4 mosse.  
 (C) Ci può riuscire con un minimo di 6 mosse.  
 (D) Ci può riuscire con un minimo di 8 mosse.  
 (E) Ci può riuscire con un numero dispari di mosse.

20. Cleopatra sta giocando con una fila formata da  $n^2$  soldatini (dove  $n$  è un numero intero maggiore di 30). Per prima cosa, Cleopatra toglie dalla fila tutti i soldatini la cui posizione corrisponde a un quadrato (ossia il 1° soldatino, il 4°, il 9°, e così via). Completata questa procedura, Cleopatra forma una nuova fila con i soldatini rimasti e la ripete togliendo ancora tutti i soldatini la cui posizione nella nuova fila corrisponde a un quadrato. La cosa va avanti in questo modo, sempre con la stessa procedura. Quanti soldatini potrebbero essere rimasti quando Cleopatra, dopo aver completato varie volte la suddetta procedura, si stanca e smette di giocare?

- (A) 126 (B) 132 (C) 125 (D) 140 (E) 120



UNIONE MATEMATICA ITALIANA  
**PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE,  
 DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA



T2

*I Giochi di Archimede - Gara Triennio*

22 novembre 2018

- La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E). Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.
- Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.
- Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.

**Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.**  
 Buon lavoro e buon divertimento!

NOME \_\_\_\_\_ COGNOME \_\_\_\_\_ CLASSE \_\_\_\_\_

data di nascita: \_\_\_\_\_ mail (facoltativa): \_\_\_\_\_

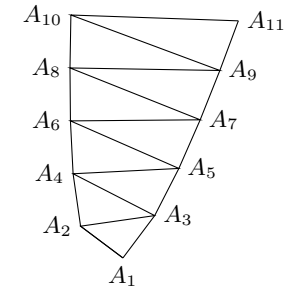
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Quale dei seguenti numeri si può ottenere sommando i quadrati di due numeri interi multipli di 3?  
 (A) 459 (B) 363 (C) 633 (D) 495 (E) 549
2. Piero costruisce un cubo incollando 1000 piccoli cubetti tutti uguali (con 10 cubetti lungo ogni spigolo). Dipinge quindi di verde tutte le facce del cubo che ha costruito. Quanti dei cubetti iniziali avranno almeno una faccia colorata di verde?  
 (A) 600 (B) 384 (C) 504 (D) 488 (E) 592
3. Sia Luca che Claudia hanno in mano due carte rosse e due nere. Claudia pesca una carta a caso dalla mano di Luca e l'aggiunge alle proprie. A questo punto, Luca pesca una carta dalla mano di Claudia. Qual è la probabilità che ciascuno dei due venga a trovarsi con due carte rosse e due carte nere?  
 (A) 2/3 (B) 2/5 (C) 3/5 (D) 3/4 (E) 1/2

4. Indicare la più grande tra queste frazioni.

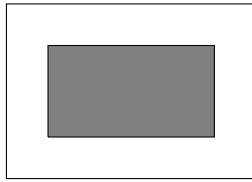
- (A)  $\frac{2018}{2011}$  (B)  $\frac{2016}{2009}$  (C)  $\frac{2020}{2013}$  (D)  $\frac{2019}{2012}$  (E)  $\frac{2025}{2018}$

5. Teodoro sta costruendo una sequenza di triangoli rettangoli, disposti come qui a lato. Il primo è il triangolo isoscele  $A_1A_2A_3$ , rettangolo in  $A_1$ , con cateti di 1 cm. Il secondo è  $A_2A_3A_4$ , rettangolo in  $A_2$ , dove  $A_2A_4$  è ancora di 1 cm. Il terzo è  $A_3A_4A_5$ , rettangolo in  $A_3$ , con  $A_3A_5$  ancora di 1 cm. La costruzione va avanti così: in ciascun triangolo  $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ , rettangolo in  $A_n$ , il cateto  $A_nA_{n+2}$  è sempre di 1 cm. Quanti cm misurerà il segmento  $A_{900}A_{901}$ ?  
 (A) 60 (B) 300 (C) 30 (D) 45 (E) 150



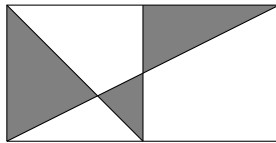
6. Un cellulare con la batteria del tutto scarica deve rimanere in carica 2 ore per ricaricarsi completamente, se nel frattempo non è in uso. Se invece è utilizzato durante la ricarica, il 40% dell'energia introdotta viene subito consumata e solo la parte restante si accumula nella batteria. Sapendo che, per ricaricare la batteria da zero, sono servite 2 ore e mezza, stabilire per quanti minuti il cellulare è stato utilizzato durante la ricarica (si suppone, che si usi o meno il telefono, che l'energia immagazzinata in un intervallo di tempo sia proporzionale alla sua durata).  
 (A) 72 (B) 90 (C) 60 (D) 87 (E) 75
7. Scrivendo per esteso il numero intero  $(10^{2018} + 2018)^2$  si utilizzano 4037 cifre. Qual è la somma di tutte queste cifre?  
 (A) 36 (B) 31 (C) 42 (D) 51 (E) 43
8. Per prepararsi ai Giochi di Archimede, Costanza sta cercando di risolvere una raccolta di quesiti tratti dalle gare degli anni passati. Ne lascia in bianco 14 e risponde correttamente a  $\frac{2}{3}$  dei rimanenti (le altre risposte sono invece sbagliate). Si accorge quindi che, calcolando i punteggi come si fa nei Giochi di Archimede, ha così realizzato un punto in meno di quanto avrebbe ottenuto rispondendo a tutte le domande e sbagliandone precisamente la metà. Circa il numero di quesiti della raccolta, si può concludere che esso è...  
 (A) minore di 30 (B) fra 30 e 33 (inclusi) (C) fra 34 e 36 (inclusi)  
 (D) fra 37 e 40 (inclusi) (E) maggiore di 40
9. Un pasticciere ha in negozio confetti di 12 gusti diversi e vuole confezionare bomboniere contenenti ciascuna 3 confetti, non necessariamente di gusti differenti. Quante bomboniere diverse può realizzare al massimo? (due bomboniere sono da considerare uguali se contengono confetti degli stessi gusti e nelle stesse quantità)  
 (A) 364 (B) 320 (C) 324 (D) 360 (E) 348

10. Il lato maggiore della cornice di un quadro è  $\frac{8}{5}$  del minore. La cornice ha lo stesso spessore su tutti e quattro i lati. Nel quadro all'interno della cornice (rappresentato con un rettangolo grigio), il lato maggiore è doppio del lato minore. Qual è il rapporto tra l'area del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cornice e l'area del quadro all'interno della cornice?
- (A)  $\frac{7}{3}$  (B)  $\frac{20}{9}$  (C)  $\frac{8}{5}$  (D)  $\frac{12}{5}$  (E)  $\frac{64}{25}$



11. Anna ha riscritto per tre volte di fila un numero intero di due cifre, ottenendo così un numero  $S$  di sei cifre. Il numero  $S$  è sicuramente divisibile per...
- (A) 1111 (B) 101 (C) 11 (D) 111 (E) 1001

12. Nella figura qui a fianco, è rappresentato un rettangolo diviso in due quadrati uguali. Il lato di ciascuno dei due quadrati è pari a 6 cm. Di quanti  $\text{cm}^2$  è l'area complessiva della regione ombreggiata?
- (A) 33 (B) 30 (C) 24 (D) 27 (E) 21



13. Nel triangolo isoscele  $ABC$ , dove  $\overline{AB} = \overline{AC} = 5 \text{ cm}$  e  $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ , la mediana uscente dal vertice  $B$  e la bisettrice uscente dal vertice  $C$  si intersecano nel punto  $D$ . Di quanti  $\text{cm}^2$  è l'area del triangolo  $BCD$ ?
- (A)  $\frac{32}{7}$  (B)  $\frac{21}{5}$  (C)  $\frac{17}{4}$  (D) 4 (E)  $\frac{14}{3}$

14. Giulia scrive i numeri interi positivi in una griglia con 7 colonne, come mostrato in figura. Poiché ha in antipatia il numero 11, nel suo elenco mancano tutti i multipli di 11. Indichiamo con  $(m; n)$  la casella che si trova nella riga numero  $m$  (contando dall'alto) e nella colonna numero  $n$  (contando da sinistra): ad esempio, la casella  $(2; 4)$  contiene il numero 12. In quale casella sarà contenuto il numero 2018?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	23
24	25	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

- (A)  $(289; 2)$  (B)  $(263; 1)$  (C)  $(278; 5)$   
 (D)  $(262; 4)$  (E)  $(288; 2)$

15. La circonferenza  $\beta$  ha centro nel punto  $B$  e raggio 40. Le circonferenze  $\alpha$  e  $\gamma$ , di centri rispettivamente  $A$  e  $C$ , hanno lo stesso raggio  $r$  e sono entrambe tangenti esternamente a  $\beta$ . I tre centri  $A, B, C$  sono allineati. Sapendo che le rette passanti per  $A$  e tangenti a  $\beta$  sono tangenti anche a  $\gamma$ , che cosa si può affermare a proposito del raggio  $r$ ?
- (A)  $r < 72$  (B)  $72 \leq r < 75$  (C)  $75 \leq r < 78$   
 (D)  $78 \leq r < 81$  (E)  $r \geq 81$

16. Tre ragazzi e due ragazze debbono sedersi attorno a un tavolo con sei sedie, numerate da 1 a 6. Per decidere il proprio posto, ciascuno dei cinque estrae a sorte uno tra sei foglietti (numerati da 1 a 6). Qual è la probabilità che la sedia che rimane vuota venga a trovarsi tra un ragazzo e una ragazza?
- (A)  $\frac{2}{5}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{3}{5}$  (D)  $\frac{1}{3}$  (E)  $\frac{3}{4}$

17. Giovanna ha disposto 9 monetine in fila. Alcune mostrano la faccia con la testa, altre quella con la croce, in questa sequenza: CCTTCTTCC. Fa questo gioco: ad ogni mossa, sceglie due monete consecutive e le capovolge entrambe. Giovanna, con alcune mosse di questo tipo, vorrebbe ottenere una fila di monete disposte nella sequenza TCTCTCTCT. Che cosa si può concludere?

- (A) Non ci può riuscire.  
 (B) Ci può riuscire con un minimo di 4 mosse.  
 (C) Ci può riuscire con un minimo di 6 mosse.  
 (D) Ci può riuscire con un minimo di 8 mosse.  
 (E) Ci può riuscire con un numero dispari di mosse.

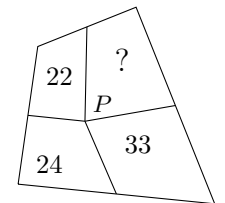
18. Cleopatra sta giocando con una fila formata da  $n^2$  soldatini (dove  $n$  è un numero intero maggiore di 30). Per prima cosa, Cleopatra toglie dalla fila tutti i soldatini la cui posizione corrisponde a un quadrato (ossia il 1° soldatino, il 4°, il 9°, e così via). Completata questa procedura, Cleopatra forma una nuova fila con i soldatini rimasti e la ripete togliendo ancora tutti i soldatini la cui posizione nella nuova fila corrisponde a un quadrato. La cosa va avanti in questo modo, sempre con la stessa procedura. Quanti soldatini potrebbero essere rimasti quando Cleopatra, dopo aver completato varie volte la suddetta procedura, si stanca e smette di giocare?
- (A) 126 (B) 132 (C) 125 (D) 140 (E) 120

19. Si consideri l'equazione  $ax^2 - bx + a = 0$  nell'incognita  $x$ , dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali positivi. Tra le seguenti 5 affermazioni, quante sono quelle vere?

- Se  $b > 2a$ , ci sono due soluzioni reali distinte.
- Se ci sono due soluzioni reali distinte, esse sono positive.
- Se una delle soluzioni è 9 volte l'altra, allora  $b > 3a$ .
- Qualunque siano  $a$  e  $b$ , non possono esserci due soluzioni intere distinte.
- Se ci sono due soluzioni reali, il loro prodotto è 1.

- (A) solo 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) tutte e 5

20. Da un punto  $P$  all'interno di un quadrilatero convesso, si tracciano i segmenti che lo congiungono ai punti medi dei lati. In questo modo, il quadrilatero viene suddiviso in quattro regioni. Nella figura sono indicate le aree di tre di queste regioni. Qual è l'area della quarta?



- (A) 32 (B) 30 (C) 27 (D) 31 (E) 29



UNIONE MATEMATICA ITALIANA  
**PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE,  
 DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA



T3

*I Giochi di Archimede - Gara Triennio*

22 novembre 2018

- La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E). Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.
- Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.
- Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.

**Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.**  
 Buon lavoro e buon divertimento!

NOME \_\_\_\_\_ COGNOME \_\_\_\_\_ CLASSE \_\_\_\_\_

data di nascita: \_\_\_\_\_ mail (facoltativa): \_\_\_\_\_

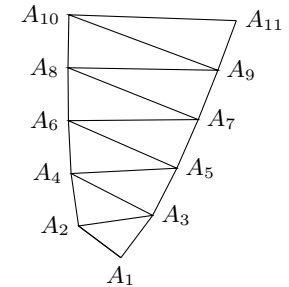
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Sia Luca che Claudia hanno in mano due carte rosse e due nere. Claudia pesca una carta a caso dalla mano di Luca e l'aggiunge alle proprie. A questo punto, Luca pesca una carta dalla mano di Claudia. Qual è la probabilità che ciascuno dei due venga a trovarsi con due carte rosse e due carte nere?  
 (A)  $2/3$  (B)  $2/5$  (C)  $3/5$  (D)  $3/4$  (E)  $1/2$
2. Piero costruisce un cubo incollando 1000 piccoli cubetti tutti uguali (con 10 cubetti lungo ogni spigolo). Dipinge quindi di verde tutte le facce del cubo che ha costruito. Quanti dei cubetti iniziali avranno almeno una faccia colorata di verde?  
 (A) 600 (B) 384 (C) 504 (D) 488 (E) 592
3. Quale dei seguenti numeri si può ottenere sommando i quadrati di due numeri interi multipli di 3?  
 (A) 459 (B) 363 (C) 633 (D) 495 (E) 549

4. Indicare la più grande tra queste frazioni.

- (A)  $\frac{2018}{2011}$  (B)  $\frac{2016}{2009}$  (C)  $\frac{2020}{2013}$  (D)  $\frac{2019}{2012}$  (E)  $\frac{2025}{2018}$

5. Teodoro sta costruendo una sequenza di triangoli rettangoli, disposti come qui a lato. Il primo è il triangolo isoscele  $A_1A_2A_3$ , rettangolo in  $A_1$ , con cateti di 1 cm. Il secondo è  $A_2A_3A_4$ , rettangolo in  $A_2$ , dove  $A_2A_4$  è ancora di 1 cm. Il terzo è  $A_3A_4A_5$ , rettangolo in  $A_3$ , con  $A_3A_5$  ancora di 1 cm. La costruzione va avanti così: in ciascun triangolo  $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ , rettangolo in  $A_n$ , il cateto  $A_nA_{n+2}$  è sempre di 1 cm. Quanti cm misurerà il segmento  $A_{900}A_{901}$ ?  
 (A) 60 (B) 300 (C) 30 (D) 45 (E) 150

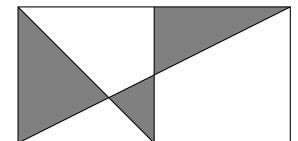


6. Per prepararsi ai Giochi di Archimede, Costanza sta cercando di risolvere una raccolta di quesiti tratti dalle gare degli anni passati. Ne lascia in bianco 14 e risponde correttamente a  $2/3$  dei rimanenti (le altre risposte sono invece sbagliate). Si accorge quindi che, calcolando i punteggi come si fa nei Giochi di Archimede, ha così realizzato un punto in meno di quanto avrebbe ottenuto rispondendo a tutte le domande e sbagliandone precisamente la metà. Circa il numero di quesiti della raccolta, si può concludere che esso è...  
 (A) minore di 30 (B) fra 30 e 33 (inclusi) (C) fra 34 e 36 (inclusi)  
 (D) fra 37 e 40 (inclusi) (E) maggiore di 40

7. Scrivendo per esteso il numero intero  $(10^{2018} + 2018)^2$  si utilizzano 4037 cifre. Qual è la somma di tutte queste cifre?  
 (A) 36 (B) 31 (C) 42 (D) 51 (E) 43

8. Un cellulare con la batteria del tutto scarica deve rimanere in carica 2 ore per ricaricarsi completamente, se nel frattempo non è in uso. Se invece è utilizzato durante la ricarica, il 40% dell'energia introdotta viene subito consumata e solo la parte restante si accumula nella batteria. Sapendo che, per ricaricare la batteria da zero, sono servite 2 ore e mezza, stabilire per quanti minuti il cellulare è stato utilizzato durante la ricarica (si suppone, che si usi o meno il telefono, che l'energia immagazzinata in un intervallo di tempo sia proporzionale alla sua durata).  
 (A) 72 (B) 90 (C) 60 (D) 87 (E) 75

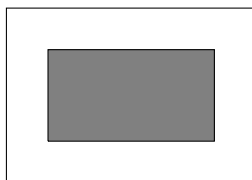
9. Nella figura qui a fianco, è rappresentato un rettangolo diviso in due quadrati uguali. Il lato di ciascuno dei due quadrati è pari a 6 cm. Di quanti  $\text{cm}^2$  è l'area complessiva della regione ombreggiata?  
 (A) 33 (B) 30 (C) 24 (D) 27 (E) 21



10. Un pasticcere ha in negozio confetti di 12 gusti diversi e vuole confezionare bomboniere contenenti ciascuna 3 confetti, non necessariamente di gusti differenti. Quante bomboniere diverse può realizzare al massimo? (due bomboniere sono da considerare uguali se contengono confetti degli stessi gusti e nelle stesse quantità)
- (A) 364 (B) 320 (C) 324 (D) 360 (E) 348

11. Anna ha riscritto per tre volte di fila un numero intero di due cifre, ottenendo così un numero  $S$  di sei cifre. Il numero  $S$  è sicuramente divisibile per...
- (A) 1111 (B) 101 (C) 11 (D) 111 (E) 1001

12. Il lato maggiore della cornice di un quadro è  $\frac{8}{5}$  del minore. La cornice ha lo stesso spessore su tutti e quattro i lati. Nel quadro all'interno della cornice (rappresentato con un rettangolo grigio), il lato maggiore è doppio del lato minore. Qual è il rapporto tra l'area del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cornice e l'area del quadro all'interno della cornice?



- (A)  $\frac{7}{3}$  (B)  $\frac{20}{9}$  (C)  $\frac{8}{5}$  (D)  $\frac{12}{5}$  (E)  $\frac{64}{25}$

13. Tre ragazzi e due ragazze debbono sedersi attorno a un tavolo con sei sedie, numerate da 1 a 6. Per decidere il proprio posto, ciascuno dei cinque estrae a sorte uno tra sei foglietti (numerati da 1 a 6). Qual è la probabilità che la sedia che rimane vuota venga a trovarsi tra un ragazzo e una ragazza?
- (A)  $\frac{2}{5}$  (B)  $\frac{1}{2}$  (C)  $\frac{3}{5}$  (D)  $\frac{1}{3}$  (E)  $\frac{3}{4}$

14. La circonferenza  $\beta$  ha centro nel punto  $B$  e raggio 40. Le circonferenze  $\alpha$  e  $\gamma$ , di centri rispettivamente  $A$  e  $C$ , hanno lo stesso raggio  $r$  e sono entrambe tangenti esternamente a  $\beta$ . I tre centri  $A, B, C$  sono allineati. Sapendo che le rette passanti per  $A$  e tangenti a  $\beta$  sono tangenti anche a  $\gamma$ , che cosa si può affermare a proposito del raggio  $r$ ?

- (A)  $r < 72$  (B)  $72 \leq r < 75$  (C)  $75 \leq r < 78$   
(D)  $78 \leq r < 81$  (E)  $r \geq 81$

15. Giulia scrive i numeri interi positivi in una griglia con 7 colonne, come mostrato in figura. Poiché ha in antipatia il numero 11, nel suo elenco mancano tutti i multipli di 11. Indichiamo con  $(m; n)$  la casella che si trova nella riga numero  $m$  (contando dall'alto) e nella colonna numero  $n$  (contando da sinistra): ad esempio, la casella  $(2; 4)$  contiene il numero 12. In quale casella sarà contenuto il numero 2018?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	23
24	25	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

- (A) (289; 2) (B) (263; 1) (C) (278; 5)  
(D) (262; 4) (E) (288; 2)

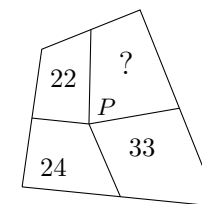
16. Nel triangolo isoscele  $ABC$ , dove  $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$  cm e  $\overline{BC} = 8$  cm, la mediana uscente dal vertice  $B$  e la bisettrice uscente dal vertice  $C$  si intersecano nel punto  $D$ . Di quanti  $\text{cm}^2$  è l'area del triangolo  $BCD$ ?
- (A)  $\frac{32}{7}$  (B)  $\frac{21}{5}$  (C)  $\frac{17}{4}$  (D) 4 (E)  $\frac{14}{3}$

17. Cleopatra sta giocando con una fila formata da  $n^2$  soldatini (dove  $n$  è un numero intero maggiore di 30). Per prima cosa, Cleopatra toglie dalla fila tutti i soldatini la cui posizione corrisponde a un quadrato (ossia il 1° soldatino, il 4°, il 9°, e così via). Completata questa procedura, Cleopatra forma una nuova fila con i soldatini rimasti e la ripete togliendo ancora tutti i soldatini la cui posizione nella nuova fila corrisponde a un quadrato. La cosa va avanti in questo modo, sempre con la stessa procedura. Quanti soldatini potrebbero essere rimasti quando Cleopatra, dopo aver completato varie volte la suddetta procedura, si stanca e smette di giocare?
- (A) 126 (B) 132 (C) 125 (D) 140 (E) 120

18. Giovanna ha disposto 9 monetine in fila. Alcune mostrano la faccia con la testa, altre quella con la croce, in questa sequenza: CCTTCTTCC. Fa questo gioco: ad ogni mossa, sceglie due monete consecutive e le capovolge entrambe. Giovanna, con alcune mosse di questo tipo, vorrebbe ottenere una fila di monete disposte nella sequenza TCTCTCTCT. Che cosa si può concludere?

- (A) Non ci può riuscire.  
(B) Ci può riuscire con un minimo di 4 mosse.  
(C) Ci può riuscire con un minimo di 6 mosse.  
(D) Ci può riuscire con un minimo di 8 mosse.  
(E) Ci può riuscire con un numero dispari di mosse.

19. Da un punto  $P$  all'interno di un quadrilatero convesso, si tracciano i segmenti che lo congiungono ai punti medi dei lati. In questo modo, il quadrilatero viene suddiviso in quattro regioni. Nella figura sono indicate le aree di tre di queste regioni. Qual è l'area della quarta?



- (A) 32 (B) 30 (C) 27 (D) 31 (E) 29

20. Si consideri l'equazione  $ax^2 - bx + a = 0$  nell'incognita  $x$ , dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali positivi. Tra le seguenti 5 affermazioni, quante sono quelle vere?

- Se  $b > 2a$ , ci sono due soluzioni reali distinte.
  - Se ci sono due soluzioni reali distinte, esse sono positive.
  - Se una delle soluzioni è 9 volte l'altra, allora  $b > 3a$ .
  - Qualunque siano  $a$  e  $b$ , non possono esserci due soluzioni intere distinte.
  - Se ci sono due soluzioni reali, il loro prodotto è 1.
- (A) solo 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) tutte e 5



UNIONE MATEMATICA ITALIANA  
**PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA**

MINISTERO DELL'ISTRUZIONE,  
 DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA



T4

*I Giochi di Archimede - Gara Triennio*

22 novembre 2018

- La prova è costituita da 20 problemi. Ogni domanda è seguita da 5 risposte indicate con le lettere (A), (B), (C), (D), (E). Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono sbagliate.
- Ciascuna risposta corretta vale 5 punti, ciascuna risposta sbagliata vale 0 punti. Per ogni risposta lasciata in bianco oppure illeggibile verrà assegnato 1 punto.
- Per ognuno dei problemi, devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. Non è consentito l'uso di alcun tipo di calcolatrice o di strumenti di comunicazione.

**Il tempo che hai a disposizione per svolgere la prova è di 110 minuti.**  
 Buon lavoro e buon divertimento!

NOME \_\_\_\_\_ COGNOME \_\_\_\_\_ CLASSE \_\_\_\_\_

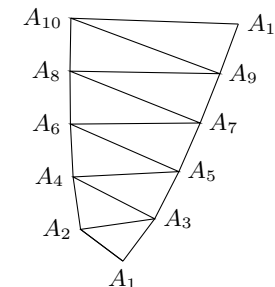
data di nascita: \_\_\_\_\_ mail (facoltativa): \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

1. Piero costruisce un cubo incollando 1000 piccoli cubetti tutti uguali (con 10 cubetti lungo ogni spigolo). Dipinge quindi di verde tutte le facce del cubo che ha costruito. Quanti dei cubetti iniziali avranno almeno una faccia colorata di verde?  
 (A) 600 (B) 384 (C) 504 (D) 488 (E) 592
2. Sia Luca che Claudia hanno in mano due carte rosse e due nere. Claudia pesca una carta a caso dalla mano di Luca e l'aggiunge alle proprie. A questo punto, Luca pesca una carta dalla mano di Claudia. Qual è la probabilità che ciascuno dei due venga a trovarsi con due carte rosse e due carte nere?  
 (A)  $\frac{2}{3}$  (B)  $\frac{2}{5}$  (C)  $\frac{3}{5}$  (D)  $\frac{3}{4}$  (E)  $\frac{1}{2}$
3. Indicare la più grande tra queste frazioni.  
 (A)  $\frac{2018}{2011}$  (B)  $\frac{2016}{2009}$  (C)  $\frac{2020}{2013}$  (D)  $\frac{2019}{2012}$  (E)  $\frac{2025}{2018}$

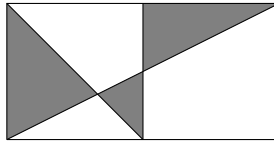
4. Quale dei seguenti numeri si può ottenere sommando i quadrati di due numeri interi multipli di 3?  
 (A) 459 (B) 363 (C) 633 (D) 495 (E) 549
5. Per prepararsi ai Giochi di Archimede, Costanza sta cercando di risolvere una raccolta di quesiti tratti dalle gare degli anni passati. Ne lascia in bianco 14 e risponde correttamente a  $\frac{2}{3}$  dei rimanenti (le altre risposte sono invece sbagliate). Si accorge quindi che, calcolando i punteggi come si fa nei Giochi di Archimede, ha così realizzato un punto in meno di quanto avrebbe ottenuto rispondendo a tutte le domande e sbagliandone precisamente la metà. Circa il numero di quesiti della raccolta, si può concludere che esso è...  
 (A) minore di 30 (B) fra 30 e 33 (inclusi) (C) fra 34 e 36 (inclusi)  
 (D) fra 37 e 40 (inclusi) (E) maggiore di 40
6. Scrivendo per esteso il numero intero  $(10^{2018} + 2018)^2$  si utilizzano 4037 cifre. Qual è la somma di tutte queste cifre?  
 (A) 36 (B) 31 (C) 42 (D) 51 (E) 43

7. Teodoro sta costruendo una sequenza di triangoli rettangoli, disposti come qui a lato. Il primo è il triangolo isoscele  $A_1A_2A_3$ , rettangolo in  $A_1$ , con cateti di 1 cm. Il secondo è  $A_2A_3A_4$ , rettangolo in  $A_2$ , dove  $A_2A_4$  è ancora di 1 cm. Il terzo è  $A_3A_4A_5$ , rettangolo in  $A_3$ , con  $A_3A_5$  ancora di 1 cm. La costruzione va avanti così: in ciascun triangolo  $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ , rettangolo in  $A_n$ , il cateto  $A_nA_{n+2}$  è sempre di 1 cm. Quanti cm misurerà il segmento  $A_{900}A_{901}$ ?  
 (A) 60 (B) 300 (C) 30 (D) 45 (E) 150



8. Un cellulare con la batteria del tutto scarica deve rimanere in carica 2 ore per ricaricarsi completamente, se nel frattempo non è in uso. Se invece è utilizzato durante la ricarica, il 40% dell'energia introdotta viene subito consumata e solo la parte restante si accumula nella batteria. Sapendo che, per ricaricare la batteria da zero, sono servite 2 ore e mezza, stabilire per quanti minuti il cellulare è stato utilizzato durante la ricarica (si suppone, che si usi o meno il telefono, che l'energia immagazzinata in un intervallo di tempo sia proporzionale alla sua durata).  
 (A) 72 (B) 90 (C) 60 (D) 87 (E) 75
9. Un pasticciere ha in negozio confetti di 12 gusti diversi e vuole confezionare bomboniere contenenti ciascuna 3 confetti, non necessariamente di gusti differenti. Quante bomboniere diverse può realizzare al massimo? (due bomboniere sono da considerare uguali se contengono confetti degli stessi gusti e nelle stesse quantità)  
 (A) 364 (B) 320 (C) 324 (D) 360 (E) 348

10. Nella figura qui a fianco, è rappresentato un rettangolo diviso in due quadrati uguali. Il lato di ciascuno dei due quadrati è pari a 6 cm. Di quanti  $\text{cm}^2$  è l'area complessiva della regione ombreggiata?

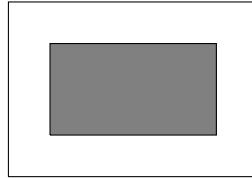


(A) 33 (B) 30 (C) 24 (D) 27 (E) 21

11. Anna ha riscritto per tre volte di fila un numero intero di due cifre, ottenendo così un numero  $S$  di sei cifre. Il numero  $S$  è sicuramente divisibile per...

(A) 1111 (B) 101 (C) 11 (D) 111 (E) 1001

12. Il lato maggiore della cornice di un quadro è  $8/5$  del minore. La cornice ha lo stesso spessore su tutti e quattro i lati. Nel quadro all'interno della cornice (rappresentato con un rettangolo grigio), il lato maggiore è doppio del lato minore. Qual è il rapporto tra l'area del rettangolo delimitato dal bordo esterno della cornice e l'area del quadro all'interno della cornice?



(A)  $7/3$  (B)  $20/9$  (C)  $8/5$  (D)  $12/5$  (E)  $64/25$

13. Giulia scrive i numeri interi positivi in una griglia con 7 colonne, come mostrato in figura. Poiché ha in antipatia il numero 11, nel suo elenco mancano tutti i multipli di 11. Indichiamo con  $(m; n)$  la casella che si trova nella riga numero  $m$  (contando dall'alto) e nella colonna numero  $n$  (contando da sinistra): ad esempio, la casella  $(2; 4)$  contiene il numero 12. In quale casella sarà contenuto il numero 2018?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	23
24	25	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...

(A)  $(289; 2)$  (B)  $(263; 1)$  (C)  $(278; 5)$   
(D)  $(262; 4)$  (E)  $(288; 2)$

14. La circonferenza  $\beta$  ha centro nel punto  $B$  e raggio 40. Le circonferenze  $\alpha$  e  $\gamma$ , di centri rispettivamente  $A$  e  $C$ , hanno lo stesso raggio  $r$  e sono entrambe tangenti esternamente a  $\beta$ . I tre centri  $A, B, C$  sono allineati. Sapendo che le rette passanti per  $A$  e tangenti a  $\beta$  sono tangenti anche a  $\gamma$ , che cosa si può affermare a proposito del raggio  $r$ ?

(A)  $r < 72$  (B)  $72 \leq r < 75$  (C)  $75 \leq r < 78$   
(D)  $78 \leq r < 81$  (E)  $r \geq 81$

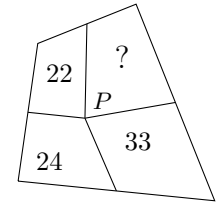
15. Tre ragazzi e due ragazze debbono sedersi attorno a un tavolo con sei sedie, numerate da 1 a 6. Per decidere il proprio posto, ciascuno dei cinque estrae a sorte uno tra sei foglietti (numerati da 1 a 6). Qual è la probabilità che la sedia che rimane vuota venga a trovarsi tra un ragazzo e una ragazza?

(A)  $2/5$  (B)  $1/2$  (C)  $3/5$  (D)  $1/3$  (E)  $3/4$

16. Nel triangolo isoscele  $ABC$ , dove  $\overline{AB} = \overline{AC} = 5 \text{ cm}$  e  $\overline{BC} = 8 \text{ cm}$ , la mediana uscente dal vertice  $B$  e la bisettrice uscente dal vertice  $C$  si intersecano nel punto  $D$ . Di quanti  $\text{cm}^2$  è l'area del triangolo  $BCD$ ?

(A)  $\frac{32}{7}$  (B)  $\frac{21}{5}$  (C)  $\frac{17}{4}$  (D) 4 (E)  $\frac{14}{3}$

17. Da un punto  $P$  all'interno di un quadrilatero convesso, si tracciano i segmenti che lo congiungono ai punti medi dei lati. In questo modo, il quadrilatero viene suddiviso in quattro regioni. Nella figura sono indicate le aree di tre di queste regioni. Qual è l'area della quarta?



(A) 32 (B) 30 (C) 27 (D) 31 (E) 29

18. Si consideri l'equazione  $ax^2 - bx + a = 0$  nell'incognita  $x$ , dove  $a$  e  $b$  sono numeri reali positivi. Tra le seguenti 5 affermazioni, quante sono quelle vere?

- Se  $b > 2a$ , ci sono due soluzioni reali distinte.
- Se ci sono due soluzioni reali distinte, esse sono positive.
- Se una delle soluzioni è 9 volte l'altra, allora  $b > 3a$ .
- Qualunque siano  $a$  e  $b$ , non possono esserci due soluzioni intere distinte.
- Se ci sono due soluzioni reali, il loro prodotto è 1.

(A) solo 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) tutte e 5

19. Cleopatra sta giocando con una fila formata da  $n^2$  soldatini (dove  $n$  è un numero intero maggiore di 30). Per prima cosa, Cleopatra toglie dalla fila tutti i soldatini la cui posizione corrisponde a un quadrato (ossia il  $1^\circ$  soldatino, il  $4^\circ$ , il  $9^\circ$ , e così via). Completata questa procedura, Cleopatra forma una nuova fila con i soldatini rimasti e la ripete togliendo ancora tutti i soldatini la cui posizione nella nuova fila corrisponde a un quadrato. La cosa va avanti in questo modo, sempre con la stessa procedura. Quanti soldatini potrebbero essere rimasti quando Cleopatra, dopo aver completato varie volte la suddetta procedura, si stanca e smette di giocare?

(A) 126 (B) 132 (C) 125 (D) 140 (E) 120

20. Giovanna ha disposto 9 monetine in fila. Alcune mostrano la faccia con la testa, altre quella con la croce, in questa sequenza: CCTTCTTCC. Fa questo gioco: ad ogni mossa, sceglie due monete consecutive e le capovolge entrambe. Giovanna, con alcune mosse di questo tipo, vorrebbe ottenere una fila di monete disposte nella sequenza TCTCTCTCT. Che cosa si può concludere?

- (A) Non ci può riuscire.
- (B) Ci può riuscire con un minimo di 4 mosse.
- (C) Ci può riuscire con un minimo di 6 mosse.
- (D) Ci può riuscire con un minimo di 8 mosse.
- (E) Ci può riuscire con un numero dispari di mosse.